

ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 14 JANVIER 1935.

PRÉSIDENCE DE M. P.-A. DANGEARD.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

M. le **Secrétaire perpétuel** dépose sur le bureau le Volume X, année 1930, première partie, des *Tables annuelles de Constantes et Données numériques de Chimie, de Physique, de Biologie et de Technologie*, dont la crise actuelle a retardé la publication. Il rappelle que l'Académie s'est intéressée en plusieurs circonstances à cette œuvre, dirigée par un Comité international, dont M. Charles Marie est le secrétaire général.

BIOLOGIE VÉGÉTALE. — *Conséquences pratiques de la germination des graines de Pomme de terre en montagne.* Note de M. **Julien Costantin**.

Rien de plus simple, en apparence, que de faire germer une graine ou même une spore : il suffit d'une pluie ou d'un arrosage pour féconder la terre; en réalité, il faut que l'air soit présent et l'eau n'est que le dissolvant des matières salines du sol qui constituent l'aliment véritable et indispensable.

Dans le cas des Orchidées et des Lycopodes, les graines des premières et spores des seconds ne sortent pas de leur torpeur, même si on leur fournit l'air et l'aliment; on sait qu'il faut ajouter, dans ces deux cas mais surtout dans le premier, un champignon spécial et toujours le même pour chaque espèce de graine afin de déclencher la germination. C'est une des nombreuses singularités qui caractérisent la grande et belle famille des Orchidées.

Le cas des graines de Pomme de terre mérite un examen spécial.

Beaucoup de gens, même des jardiniers habiles, ont tenté vainement de mettre en branle les semences de cette plante; parfois cependant ils sont arrivés à avoir des plantules; mais, par une malchance dont ils n'ont pu trouver l'explication, jamais ils ne sont parvenus à élever une plante normale produisant un tubercule, une fleur et à plus forte raison de nouvelles graines. C'est surtout le défaut de tubérisation qui est à la fois décevant et frappant ainsi que le caractère nain et pauvre du végétal ainsi obtenu.

Heureusement les résultats négatifs qu'on vient de lire ne sont pas définitifs et les maîtres de la science horticole et de l'art délicat du jardinage sont parvenus à lever les difficultés précédentes.

Leurs procédés sont, sinon secrets, du moins peu connus et n'ont jamais été sans doute publiés. La preuve de leurs succès, c'est qu'ils sont parvenus à faire des croisements et à élever complètement les graines des hybrides, de manière à avoir des fleurs et des semences de deuxième génération. Je citerai, à ce propos, un exemple parmi les nombreuses hybridations de Pomme de terre réalisées dans les Établissements Vilmorin à Verrières-le-Buisson : celui de la variété *Maréchal Franchet d'Esperey* que Louis de Vilmorin a bien voulu me communiquer, qui n'est pas encore dans le commerce. Ayant cultivé cette variété dans les Pyrénées, en 1933 et surtout en 1934, avec MM. Bouget et Magrou, nous avons constaté l'existence de caractères hybrides qui sont loin d'être fixés : il y avait des tubercules rouges, rosés ou blancs, dont la forme pouvait être ronde, ovale ou très oblongue; certains d'entre eux avaient la propriété singulière de bourgeonner.

On voit donc que les horticulteurs expérimentés réussissent même facilement la germination des graines de Pomme de terre, mais en suivant une technique assez particulière que je vais indiquer.

Les semis sont faits très tôt, vers la fin de février soit en serre à multiplication à la température de 18°, soit en couches chaudes. Voici les stades successifs d'une de ces opérations : semis le 26 février 1934; transplantation en terrine le 24 mars, sous châssis froid; puis mise en pots séparés, le 10 avril; toute cette culture est faite sur terreau de feuilles. Remarque importante, à la fin de cette *première année* on ne récolte que *peu ou pas de tubercules* : leur production est donc aléatoire. Mais, dès qu'on en a un seul, on est maître de l'élevage car, à la deuxième culture (issue de ces premiers tubercules), on adopte tout de suite la culture ordinaire de la Pomme de terre de tubercules en tubercules.

La découverte qui vient d'être ainsi exposée a une importance capitale pour la culture de la Pomme de terre et notamment pour la lutte contre la dégénérescence, et c'est là que les efforts du praticien ont commencé, sans que personne l'ait dit, à tenir compte des résultats intéressants que nous avions obtenus, mes collaborateurs et moi, en montagne contre les maladies à virus.

Il fut constaté, notamment à Verrières-le-Buisson, que certains types issus de graines (en particulier la variété *Maréchal Franchet d'Esperey*) résistaient aux maladies de la dégénérescence. Afin de faire étudier cette question en montagne, on a fourni à M. Lebard, qui est mon collaborateur dans les Alpes, en 1931 et surtout en 1932, soit des tubercules venant de germination, soit des graines, soit des plants.

L'immunité contre les redoutables fléaux qui viennent d'être nommés a d'ailleurs été observée antérieurement dès 1928 et pendant les trois années suivantes, par MM. Schultz, Bonde et Raleigh dans le Maine (États-Unis), aux cours d'expériences faites sur deux types de la variété américaine *Green Mountain* (1). L'innocuité vis-à-vis de trois virus (*mild mosaic*, enroulement et *spindle tuber*) a été absolue, car on n'a observé aucun cas pathologique de 1928 à 1931; ces plantes ayant été élevées de graines, il semble bien en découler (au moins dans ce cas) que les semences ne transmettent pas les virus (c'est donc un deuxième cas d'immunité et cela rend vraisemblable qu'il s'agit d'une propriété constante).

Comment ces plantes indemnes ont-elles gardé ce caractère pendant les quatre années où elles ont été cultivées au milieu d'innombrables plantes malades voisines? Ce fait est de la plus haute importance, il semble indiquer que ces plantes qui étaient saines devaient posséder une résistance remarquable aux dégénérescences. Il est bien difficile de penser que, dans un milieu aussi contaminé, les maladies ne finissent par réapparaître. Les conditions ne seraient certainement pas propices pour faire la multiplication en grand des tubercules; elle s'impose si l'on veut procurer aux cultivateurs les semences saines en nombre immense dont ils ont l'impérieux besoin.

Ceci m'amène à parler des semis de graines de Pomme de terre en montagne que nous avons faits, mes collaborateurs et moi en 1933 avec grand succès (2); essais répétés en 1934 avec le même résultat : production de *nombreux tubercules dès la première année* de cultures issues de graines.

Si, comme cela est probable par ce qui vient d'être exposé plus haut, les graines ne transmettent pas les virus, c'est en montagne qu'il faut faire les semis. On doit renoncer à l'élevage des plantules dans les plaines (comme dans le Maine, aux États-Unis, ou à Verrières-le-Buisson, en France); la raison en est évidente puisque de telles contrées sont envahies d'une manière intense par ces innombrables affections qui attaquent non seulement la Pomme de terre mais toutes les plantes cultivées.

Les dangers de contamination ne sont plus les mêmes en montagne, car les plantes

---

(1) Schultz, Bonde et Raleigh, *The Maine agricultural experiment Station Orono, University of Maine*, Bull. 370, janvier 1934, p. 11.

(2) Costantin, Magrou, Bouget et Mlle V. Jaudel, *Comptes rendus*, 198, 1934, p. 1195.

saines restent saines, à la condition qu'il n'y ait pas dans le voisinage des pieds atteints de dégénérescences.

Grâce aux plantations alpestres avec des tubercules rigoureusement sains issues de graines, le problème de la multiplication sera aisément résolu; d'ailleurs s'il y a quelques pieds par hasard contaminés, ils seront arrachés sans retard lors des inspections : le mal restera donc sans grave effet.

Règle absolue, il ne faudra pas faire les cultures précédentes dans une région montagnarde où il y aura beaucoup de plantes malades : si ces dernières existent, elles devront être radicalement détruites.

Il faut absolument renoncer aux élevages en serre aux environs de Paris *dès la fin de février* pour les raisons suivantes :

1° Les semis de graines à 1400^m dans les Pyrénées en 1934, faits *le* 26 *mai*, se sont montrés aussi productifs en tubercules que les précédents, en 1933.

2° Ces semis alpestres ne risquent pas de se contaminer, tandis que les dangers dus à la maladie sont très grands en plaine. On pourrait, il est vrai, les envoyer à 1400^m au milieu de mai, avant l'apparition ou l'extension des dégénérescences, mais il est plus simple et plus économique surtout de faire des cultures de graines en montagne directement et de suite en pleine terre.

3° On a vu qu'au Peyras, le nombre des tubercules récoltés de graines en 1934, sur un pied peut être de 17, 18 ou 29 (souvent 10 tubercules en moyenne par pied) : ces nombres sont bien supérieurs à ceux donnés par la multiplication courante faite en plaine par les jardiniers [1].

C'est donc *l'élevage des graines en montagne à* 1400^m *ou* 1500^m *d'altitude qui donnera la plus grande multiplication en tubercules et l'assurance d'avoir des semences saines.*

Il en découle donc que c'est ainsi que l'on pourra vraisemblablement résoudre radicalement le problème de la dégénérescence.

Il faut toutefois faire ici une restriction. Dans tout ce qui précède, il n'a été question que des anciennes maladies à virus; on a malheureusement découvert dans ces dernières années ce que l'on appelle des types à *virus inapparents*. Les plantes ainsi malades ont tous les caractères de végétaux sains. L'étude en montagne des variétés présentant ces cas pathologiques n'a pas été faite jusqu'ici. Il se pourrait, mais c'est peu probable, que de tels virus résistent à l'action de l'altitude. Ce serait certainement très fâcheux, car les variétés ainsi atteintes sont légion : on a affirmé que toutes les variétés américaines renferment des virus inapparents; l'Europe paraît

---

(1) Costantin, Bauget et Magrou, *Comptes rendus*, 199, 1934, p. 1547.

jusqu'ici moins défavorisée à ce point de vue, cependant la variété hollandaise *Thorbecke*, la variété française *Jaune d'or* sont également atteintes de ce mal mystérieux. On sait qu'on arrive à déceler le fléau caché en injectant par greffe le suc de certaines variétés qui méritent, à cause de cela, le nom de variétés réactives.

M. P. Langevin dépose sur le bureau de l'Académie le volume intitulé *Structure et propriétés des noyaux atomiques*, dans lequel sont publiés les rapports et discussions du Conseil international de Physique Solvay qui s'est tenu à Bruxelles du 22 au 29 octobre 1933 avec, pour objet, l'examen des résultats obtenus et des problèmes posés en physique nucléaire. Bien que ce très important et très actuel domaine de recherches se soit enrichi depuis un an par la découverte de la radioactivité artificielle, le volume actuellement publié représente une mise au point très complète de toutes les questions qui s'y rattachent. Il est édité à la librairie Gauthier-Villars par l'Institut de Physique Solvay.

ÉLECTIONS.

M. Henri Vallée est élu Correspondant pour la Section d'Économie rurale par 42 suffrages contre 5 à M. *Maurice Nicloux*, 1 à M. *Jean Feytaud* et 1 à M. *André Paillot*.

PLIS CACHETÉS.

M. Raoul Estripeaut demande l'ouverture d'un pli cacheté reçu dans la séance du 2 janvier 1935 et enregistré sous le n° 10960.

Ce pli, ouvert en séance par M. le Président, contient une Note intitulée : *Étiologie du Cancer*.

(Renvoi à la Section de Médecine et Chirurgie.)

CORRESPONDANCE.

MM. **Alexandre Guilliermond**, **Joseph Magrou** prient l'Académie de vouloir bien les compter au nombre des candidats à la place vacante dans la Section de Botanique par le décès de M. *H. Lecomte*.

THÉORIE DES NOMBRES. — *Une nouvelle variante de la démonstration du théorème de Waring*. Note de M. **I. Vinogradov**, présentée par M. Hadamard.

1. La présente démonstration du théorème de Waring, tant dans son idée que dans son mode de généralisation, est très proche de mes dernières démonstrations de ce théorème (¹). Ici, comme précédemment, la variable u, parcourant une suite de valeurs composées suivant une loi déterminée, joue un rôle important. La loi de la suite des valeurs est la suivante : Soient n un entier fixe >1 ; P un entier pouvant croître indéfiniment; $\nu=1/n$; $P_1=[n^\nu P^{1-\nu}]$; k un entier fixe >0; $\sigma=n(1-\nu)^k$. Prenons les nombres

$$s_1=1^n,\ 2^n,\ \ldots,\ P^n.$$

En intercalant, entre chaque couple de valeurs successives s'_1 et s''_1 de la variable s_1, tous les nombres de la forme s'_1+w^n, où w est un entier et $0<w^n<s''_1-s'_1$, et en adjoignant ces nombres aux nombres s_1, nous obtenons une seconde série de nombres s_2. Avec la série s_2 répétons la même opération. Nous obtenons ainsi les nombres s_3, s_4, ..., et ensuite les nombres $\xi=s_k$. Faisons alors prendre à la variable u les valeurs

$$u=\xi+v^n,$$

où les variables ξ et v parcourent, indépendamment l'une de l'autre, les séries de valeurs suivantes : la première parcourt la série formée tout à l'heure et la seconde parcourt la série P, P + 1, ..., 2P − 1.

Les nombres u ainsi composés se trouvent dans l'intervalle $P^n \leqq u < 2^n P^n$,

(¹) *Comptes rendus*, **199**, 1934, p. 174-175; *C. R. de l'Acad. des Sciences de l'U. R. S. S.*, 2, nº 6, 1934, p. 337-341.

Ils sont tous différents l'un de l'autre et leur nombre X satisfait à la condition [1]

$$X \gg P^{n-\sigma},$$

où σ peut être fait arbitrairement petite pour k suffisamment grand.

2. Pour simplifier les calculs, j'introduis ici, comme dans mes travaux précédents, avec un entier N_0 suffisamment grand, un entier auxiliaire N capable de varier dans des limites assez larges. Supposons

$$P = \left[\frac{1}{3} N_0^{\nu} + 1\right], \qquad R = \left[P^{1-\frac{\nu}{2}}\right], \qquad Y = \left[\left(\frac{\sqrt{P}}{2}\right)^{\nu}\right],$$

$$k = [2n \log n + n \log 6 - 1] \qquad (n > 3);$$

$$S = \sum_{u} e^{2\pi i \alpha u}, \qquad S_1 = \sum_{y=1}^{Y} \sum_{u_1} e^{2\pi i \alpha y^n u_1}, \qquad T = \sum_{x=1}^{3P} e^{2\pi i \alpha x^n},$$

$$N_0 - N_0 P^{-\frac{1}{4}} < N \leqq N_0,$$

u parcourt la série des valeurs du n° 1 et u_1 la série des valeurs composées d'une manière analogue, avec le seul changement de P en R. Désignons le nombre des valeurs de u_1 par X_1. Considérons l'intégrale

$$I_N = \int_0^1 S^2 S_1 T^{4n-2} e^{-2\pi i \alpha N} \, d\alpha.$$

En supposant $\tau = 2n 3^{n-1} P^{n-\frac{1}{2}}$, prenons, au lieu de l'intervalle $0 \leqq \alpha \leqq 1$, l'intervalle $-\tau^{-1} \leqq \alpha \leqq 1 - \tau^{-1}$; divisons ce dernier en intervalles partiels conformément aux conditions

I. $\quad \alpha = \dfrac{a}{q} + z, \qquad (a, q) = 1, \qquad 1 \leqq q \leqq \sqrt{P}, \qquad -\tau^{-1} \leqq z \leqq \tau^{-1}.$

II. $\quad$ Tous les autres.

En accord avec cette division,

$$I_N = H_1 + H_2.$$

3. Estimons d'abord H_2. Si α appartient à l'intervalle de la IIe classe,

$$\sqrt{P} < q \ll P^{n-\frac{1}{2}},$$

---

(1) $A \ll B$ ou $B \gg A$ a le même sens que $A = O(B)$.

moyennant quoi on obtient

$$S_1 \leqslant YX_1 P^{\left(1-\frac{\nu}{2}\right)\frac{\sigma}{2}-\frac{\nu}{4}},$$

$$H_2 \leqslant P^{4n-2} YX_1 P^{\left(1-\frac{\nu}{2}\right)\frac{\sigma}{2}-\frac{\nu}{4}} \int_0^1 e^{2\pi i\alpha(u-u')}\,d\alpha \leqslant YX^2 X_1 P^{3n-2-\delta}.$$

où δ est une constante positive.

Pour H_1, nous obtenons

$$H_1 \geqslant YX^2 X_1 P^{3n-2},$$

et, par conséquent (en posant $N = N_0$),

$$I_{N_0} \geqslant YX^2 X_1 P^{3n-2}.$$

Ainsi $I_{N_0} > 0$. Mais I_{N_0} est le nombre des représentations du nombre N_0 sous la forme

$$N_0 = u + u' + y^n u_1 + x_1^n + x_2^n + \ldots + x_{4n-2}^n.$$

Cette forme se présente comme la somme de termes de la forme t^n en nombre ne surpassant pas

$$3(k+1) + 4n - 2 < n(6\log n + 3\log 6 + 4) < n(6\log n + 10).$$

Nous obtenons ainsi le théorème suivant :

Théorème. — *Soit n un entier* > 3

$$s = [n(6\log n + 3\log 6 + 4)].$$

Il existe une constante c, dépendante seulement de n et telle que pour chaque entier $N \geqq c$, *on ait*

$$N = t_1^n + t_2^n + \ldots + t_s^n,$$

où $t_1, t_2, \ldots, t_s$ *sont des entiers* $\geqq 0$.

ALGÈBRE. — *Remarques sur les équations algébriques dont les équations dérivées ont toutes leurs racines réelles.* Note de M. **Tibère Popoviciu**, présentée par M. Hadamard.

1. Nous ne considérons que des polynomes à coefficients réels. Soit $P(x)$ un polynome de degré n. Désignons par r le nombre des zéros réels multiples du polynome $P(x)$ et par k la somme du nombre de tous les zéros réels distincts et du nombre des zéros complexes de $P(x)$. Remarquons que le nombre $k + r - 1$ est au plus égal à $n - 1$.

Nous avons obtenu la propriété suivante :

S'il existe un polynome $Q(x)$ *de degré* m *tel que l'équation dérivée* $[P(x).Q(x)]' = 0$ *ait toutes ses racines réelles, il existe certainement un polynome* $R(x)$ *de degré* $\leq m$ *tel que l'équation dérivée* $[P(x).R(x)]' = 0$ *ait toutes ses racines réelles dont au plus* $k+r-1$ *sont distinctes.*

La démonstration s'appuie sur la continuité des racines d'une équation algébrique par rapport aux coefficients et, en remarquant que, pour $m = 0$, la propriété résulte du fait que si un polynome a un zéro multiple d'ordre ν ($\nu > 1$), sa dérivée a le même zéro multiple d'ordre $\nu - 1$.

On peut dire aussi, sans préciser la nature des zéros du polynome $P(x)$, que s'il existe un polynome $Q(x)$ tel que l'équation dérivée $[P(x).Q(x)]' = 0$ ait toutes ses racines réelles, il existe un polynome $R(x)$ tel que l'équation dérivée $[P(x).R(x)]' = 0$ ait toutes ses racines réelles dont *au plus* $n-1$ *sont distinctes.*

2. Soit

$$F(x) = (x-c)^p[(x-c)^2 + d^2]Q(x),$$

$Q(x)$ étant un polynome, c, $d \neq 0$ des constantes réelles et p un entier positif. Alors :

L'équation dérivée $F'(x) = 0$ *ne peut avoir toutes ses racines réelles.*

C'est encore à l'aide de la continuité des racines que nous avons prouvé qu'il suffit de démontrer la propriété pour le cas où $F'(x)$ n'aurait que deux zéros distincts au plus, dont l'un toujours simple. Pour ce cas, on démontre la propriété directement.

3. Comme conséquence de la propriété précédente, nous avons le théorème suivant :

Si l'équation dérivée $f'(x) = 0$ *d'une équation algébrique de degré* n *a toutes ses racines réelles et si l'équation* $f(x) = 0$ *a un couple de racines imaginaires conjuguées* $a \pm ib$, *cette équation ne peut avoir aucune racine réelle dans l'intervalle*

$$\left(a - b \operatorname{tang}\frac{\pi}{n},\ a + b \operatorname{tang}\frac{\pi}{n}\right).$$

Les limites ne sont atteintes que pour les équations

$$f(x) \equiv C\left[\left(x - a \pm b \operatorname{cotg}\frac{2\pi}{n}\right)^n - \frac{(\pm b)^n}{\left(\sin\frac{2\pi}{n}\right)^n}\right] = 0,$$

C étant une constante.

4. Nous avons aussi examiné les équations qui n'ont qu'un seul couple de racines imaginaires conjuguées et obtenu le théorème suivant :

Si l'équation dérivée $f'(x)=0$ d'une équation algébrique de degré n a toutes ses racines réelles et si l'équation $f(x)=0$ a un seul couple de racines imaginaires conjuguées $a \pm ib$, cette équation ne peut avoir aucune racine dans l'intervalle

$$(a-\lambda_n b,\ a+\lambda_n b),$$

où λ_n est la racine réelle et positive de l'équation

$$(n-1)\sqrt{2(n-1)}\,x(x^2+9)-3(n+1)\sqrt{3(n-2)}\,(x^2+1)=0.$$

Les limites sont atteintes pour les équations

$$[(x-a)^2+b^2](x\pm\lambda_n)(x\pm\mu_n)^{n-3}=0,$$

où les signes se correspondent, et

$$\mu_n=\frac{-\lambda_n[(n-1)^2\lambda_n^2+3(3n^2-10n-1)]}{3(n+1)(3-\lambda_n^2)}.$$

Lorsque n croît, λ_n décroît et tend vers une limite positive λ pour $n\to\infty$. On peut donc énoncer une propriété analogue ne dépendant pas du degré n. Les racines sont extérieures à un intervalle $(a-\lambda b,\ a+\lambda b)$, où λ est la racine réelle et positive de l'équation

$$\sqrt{2}\,x(x^2+9)-3\sqrt{3}(x^2+1)=0.$$

Les limites ne sont pas atteintes, mais le nombre λ ne peut être remplacé par aucun autre nombre plus grand.

λ est voisin de 0,5. Plus exactement, il est compris entre 0,4946 et 0,4947.

ALGÈBRE. — *Sur un idéal attaché à une courbe gauche algébrique définie par sa représentation monoïdale.* Note de M. **Paul Dubreil**, présentée par M. Julia.

1. Soit C une courbe gauche algébrique irréductible ne présentant pas de singularités. Supposons l'espace projectif rapporté à des axes tels que le point à l'infini sur Oz, Z, n'appartienne pas à C. Soient $\mathfrak{C}$ l'idéal homogène engendré par les formes $F(x, y, z, t)$ nulles sur C, $\overline{\mathfrak{C}}$ l'idéal homogène engendré par les formes $F(x, y, 0, t)$. La variété de $\overline{\mathfrak{C}}$ se compose des points d'intersection, supposés distincts, de C avec le plan $z=0$. C est dite de

première espèce si $\overline{\mathfrak{C}}$ n'admet pas de composant impropre ([1]), de seconde espèce dans le cas contraire. Rappelons quelle est essentiellement la signification géométrique de cette définition : la condition nécessaire et suffisante pour que le théorème de Nœther s'applique à l'intersection de la courbe C et de toute surface ne la contenant pas, est que C soit de première espèce ([2]). Il y a donc intérêt à déterminer complètement cet idéal $\overline{\mathfrak{C}}$ à partir des données définissant C et notamment de la représentation monoïdale de cette courbe : c'est précisément le but de la présente Note.

2. Soient

$$(1) \qquad \varphi(x, y, t) = 0, \qquad z = \frac{u_1(x, y, t)}{u_0(x, y, t)}$$

les équations du cylindre projetant la courbe parallèlement à Oz et d'un monoïde de sommet Z passant par C. On peut, comme on sait, remplacer ce monoïde par une infinité d'autres de même sommet, le dénominateur χ dans l'équation du monoïde étant assujetti à la seule condition de s'annuler aux points doubles D de la courbe $\varphi = 0$, points doubles apparents de C ([3]). Le choix de χ entraîne, à un multiple éventuel de φ près, celui du numérateur ψ, qui s'annule en tout point commun à $\varphi = 0$ et $\chi = 0$. On peut donc prendre $\chi = u_1$, il lui correspond $\psi = u_2$. A $\chi = u_2$ correspond de même un numérateur $\psi = u_3$, etc. La suite $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_m, \ldots$ ainsi formée a, d'après des identités bien faciles à établir, la propriété fondamentale suivante : *La condition nécessaire et suffisante pour que la surface*

$$(2) \qquad F(x, y, z, t) = P_0 z^m + P_1 z^{m-1} + \ldots + P_m = 0$$

contienne C *est que l'on ait la congruence* ([4])

$$(3) \qquad P_0 u_m + P_1 u_{m-1} + \ldots + P_m u_0 \equiv 0 \qquad (\bmod \varphi).$$

([1]) Pour la définition de cette notion, voir par exemple P. Dubreil, *Comptes rendus*, 196, 1933, p. 84; B. L. van der Waerden, *Proc. Kon. Akad. Wetenschappen Amsterdam*, 31, n° 7, § 9. M. van der Waerden emploie l'expression *projectively irrelevant*.

([2]) Voir P. Dubreil, *Comptes rendus*, 196, 1933, p. 1637; *Quelques propriétés des variétés algébriques se rattachant aux théories de l'Algèbre moderne* (*Actualités scientifiques et industrielles*, sous presse).

([3]) Cette propriété, démontrée par Halphen (*Journal de l'École Polytechnique*, 52, 1882, p. 1), est une conséquence immédiate d'une remarque de M. van der Waerden sur l'application du théorème de Nœther (*Math. Ann.*, 104, 1931, p. 472).

([4]) Halphen, *loc. cit.*, p. 33.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une surface de degré m passant par C et ne contenant pas Z est donc :

(4) $$u_m \in (\varphi, u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}).$$

Si l'on suppose, comme on peut toujours le faire, que la première surface minima de C, $F_1(x, y, z, t) = 0$, ne passe pas par Z, le degré γ_1 de cette surface est la plus petite valeur de m pour laquelle la relation (4) est vérifiée.

3. De la congruence (3) résulte

$$F(x, y, 0, t) = P_m \in \mathfrak{c}_m,$$

en posant

$$\mathfrak{a}_m = (\varphi, u_1, u_2, \ldots, u_m) \qquad \mathfrak{c}_m = \mathfrak{a}_m : u_0.$$

Toute forme de $\overline{\mathfrak{C}}$ appartient donc à l'un des idéaux $\mathfrak{c}_m$ et réciproquement tout $\mathfrak{c}_m$ est multiple de $\overline{\mathfrak{C}}$. On a d'ailleurs

(5) $$\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{a}_m \subset \mathfrak{a}_{m+1} \subset \ldots,$$
(6) $$\mathfrak{c}_1 \subset \mathfrak{c}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{c}_m \subset \mathfrak{c}_{m+1} \subset \ldots,$$

et, d'après le « Teilerkettensatz » [1], tous les $\mathfrak{a}_m$ sont égaux à partir d'un certain rang $m = \mu$ à un même idéal $\mathfrak{a}$. En posant $\mathfrak{c} = \mathfrak{a} : u_0$, on a, pour $\mu \geqq m$: $\mathfrak{c}_m = \mathfrak{c}$ et il en résulte immédiatement $\overline{\mathfrak{C}} = \mathfrak{c}$.

On peut de plus apporter les précisions suivantes : On a

$$\mathfrak{a}_{\gamma_1} = (\varphi, u_1, \ldots, u_{\gamma_1 - 1}, u_{\gamma_1}) = (\varphi, \overline{F}_1 u_0, u_1, \ldots, u_{\gamma_1 - 1}),$$

et, en tenant compte de la définition de γ_1

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{\gamma_1} = \mathfrak{a}_{\gamma_1+1} = \ldots, \neq \mathfrak{a}_{\gamma_1 - 1}, \qquad \mathfrak{c} = \mathfrak{c}_{\gamma_1} = \mathfrak{c}_{\gamma_1+1} = \ldots, \neq \mathfrak{c}_{\gamma_1 - 1}.$$

Le rang exact à partir duquel les idéaux des suites (5) *et* (6) *sont égaux n'est donc autre que le degré minimum* γ_1 *des surfaces contenant* C. *Enfin on a*

$$\overline{\mathfrak{C}} = \mathfrak{a}_{\gamma_1} : u_0 = [\overline{F}_1, (\varphi, u_1, \ldots, u_{\gamma_1 - 1}) : u_0].$$

---

(1) Voir par exemple B. L. VAN DER WAERDEN, *Moderne Algebra*, 2, Chap. XII, § 80.

GÉOMÉTRIE. — *Sur la caractérisation topologique des surfaces de Riemann.* Note [1] de M. SIMON STOÏLOW.

1. La notion de surface de Riemann peut, comme on sait, être définie *a priori*, indépendamment de toute fonction analytique (voir, par exemple, H. Weyl : *Die Idee der Riemannschen Flaeche*, p. 36). Une telle définition peut toujours être encadrée dans la théorie des espaces abstraits. Caractériser, de ce point de vue, topologiquement les surfaces de Riemann, c'est définir, *par leurs caractères topologiques*, la classe de variétés que l'on obtient, par les transformations biunivoques et bicontinues quelconques, appliquées aux surfaces de Riemann.

Le but de cette Note est de montrer comment la notion de *transformation intérieure* [c'est-à-dire transformation continue qui conserve les notions d'*ensemble ouvert* et de *continu*], notion que j'ai étudiée dans plusieurs Mémoires antérieurs, permet de caractériser topologiquement les surfaces de Riemann sans avoir recours aux axiomes dits de triangulabilité ou de dénombrabilité habituellement employés dans ce problème.

2. Considérons un espace abstrait, de ceux que M. Fréchet a appelés accessibles, et qui peut être défini comme ensemble d'éléments quelconques satisfaisant aux trois axiomes que M. Kuratowski (voir *Topologie*, Varsovie-Lwow, 1933, p. 15) a formulés de la manière suivante :

1° à chaque ensemble X d'éléments de l'espace correspond un ensemble $\overline{X}$ appelé sa *fermeture;* on a, pour X_1 et X_2 quelconques,

$$\overline{X_1 + X_2} = \overline{X_1} + \overline{X_2};$$

2° un ensemble formé d'un seul élément (ou vide) est sa propre fermeture;

3° quel que soit X, on a

$$\overline{\overline{X}} = \overline{X}.$$

Les notions d'ensemble fermé ou ouvert, de continu, de transformation continue, se trouvent implicitement définies par ces axiomes.

On dira que l'espace considéré est une *variété à deux dimensions* s'il est connexe et si, pour chacun de ses éléments, il existe au moins un ensemble ouvert le contenant, qui est homéomorphe au plan euclidien.

---

[1] Séance du 2 janvier 1935.

3. Ces définitions rappelées on peut énoncer la proposition suivante : *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une variété à deux dimensions soit homéomorphe à une surface de Riemann, est qu'il existe une transformation intérieure de cette variété la transformant en une région de la sphère euclidienne.*

La condition est, évidemment, nécessaire, car sur toute surface de Riemann existe une fonction analytique et, d'autre part, toute fonction analytique est une transformation intérieure de sa surface de Riemann.

J'ai démontré (¹) que, au point de vue de l'inversion locale, les transformations intérieures se comportent topologiquement comme les fonctions analytiques dans leurs domaines de régularité. Il suffit donc, pour démontrer que la condition de l'énoncé est suffisante, de s'assurer que l'ensemble des feuillets superposés, appliqués par la transformation intérieure sur la sphère, peut être décomposé en une infinité dénombrable de domaines fermés polyédriques, c'est-à-dire : est une surface de Riemann.

Soient (γ) les cercles tracés sur la sphère ayant pour centre un point à coordonnées rationnelles et de rayon rationnel. Pour chaque point p de la variété il existe un cercle γ_P comprenant à son intérieur l'image P de p, pour lequel les points d'un certain voisinage de p forment un domaine Δ_p se transformant en γ_P de manière que les frontières se correspondent. Tout revient à montrer qu'il n'y a qu'une infinité dénombrable de Δ_p *distincts*. La connexion de la variété et le théorème de Borel-Lebesgue montrent que l'ensemble des Δ_p est dénombrable si tous les Δ_p qui ont des points intérieurs communs avec l'un d'entre eux forment un ensemble au plus dénombrable. Or ceci est une conséquence immédiate du fait que deux Δ_p relatifs à un *même* γ ne peuvent avoir des points intérieurs communs et que les points d'un Δ_p qui ont même image sont en nombre fini.

4. On sait que les transformations biunivoques et bicontinues d'une variété en un sous-ensemble d'une autre de même dimension conservent la notion d'ensemble ouvert et, naturellement, celle de continu; ce sont donc des transformations intérieures.

La proposition de plus haut apparaît, dès lors, comme une extension d'un théorème topologique bien connu (²) concernant les surfaces quasi simples (schlichtartig).

(¹) *Annales sc. de l'École Normale*, 45, 1928, p. 367, et *Annales de l'Institut H. Poincaré*, 2, 1932, p. 251.

(²) Voir B. de Kerékjartó, *Vorlesungen über Topologie*, p. 165.

GÉOMÉTRIE. — *Sur certains réseaux.*

Note [1] de M. **Georges Tzitzéica**, présentée par M. Élie Cartan.

1. Les invariants de Darboux

$$h = a_u + ab - c, \qquad k = b_v + ab - c,$$

de l'équation de Laplace

$$x_{uv} + ax_u + bx_v + cx = 0,$$

qui correspond à un réseau (x) d'un espace projectif à n dimensions, sont des invariants relatifs. C'est le rapport $h : k$ qui est un invariant absolu pour le groupe

$$x = \lambda(u, v)X, \qquad u = f(\alpha), \qquad v = g(\beta).$$

Il est donc naturel, dans une étude systématique, de considérer en premier lieu les réseaux (x) pour lesquels on a $h : k = m = \text{const}$. Cependant on n'a étudié que le cas $m = 1$ des réseaux à invariants égaux. Je me propose de donner pour le cas $m \neq 1$ quelques résultats que je crois intéressants.

Pour caractériser les réseaux de cette classe, je considère les coniques C_1 et C_{-1} de Kœnigs attachées à chaque point x du réseau. Les coniques étant bitangentes, toute sécante qui passe par x les coupe suivant quatre points qui ont le même rapport anharmonique. Ce rapport anharmonique varie, en général, avec le point x du réseau. Il n'est constant que dans le cas $h : k = m$. Nous dirons d'un tel réseau qu'il est à invariant absolu constant.

2. Je considère maintenant un cas particulier de la classe précédente de réseaux. Je suppose que l'on ait en même temps $h : k = m$ et $h_1 : k_1 = m_1$, c'est-à-dire que les réseaux (x) et (x_1), transformés de Laplace l'un de l'autre, soient tous les deux à invariant absolu constant. Il est aisé de démontrer que dans ce cas tous les réseaux de la suite de Laplace de (x) sont à invariant absolu constant, qui n'est pas le même d'un réseau à l'autre.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'on ait

$$(\log h)_{uv} = \left(2 - \frac{1}{m} - m_1\right)h, \; h = mk.$$

---

[1] Séance du 2 janvier 1935.

Il y a, manifestement, deux cas à considérer, selon que l'on a

$$2 - \frac{1}{m} - m_1 \pm 0 \quad \text{ou} \quad = 0.$$

Dans le premier cas, l'équation de Laplace du réseau (x) se ramène à l'équation $E(\beta, \beta')$, étudiée par Darboux dans ses *Leçons sur la théorie des surfaces*. On a ainsi une interprétation géométrique intéressante des réseaux qui correspondent à une telle équation.

Dans le second cas, on peut amener l'équation de Laplace à avoir les invariants h et k de Darboux constants.

3. Les réseaux à invariants de Darboux constants jouissent de propriétés particulièrement intéressantes. Si l'on a un tel réseau, tous les réseaux de la suite de Laplace qu'on en déduit ont des invariants constants. Tous ces réseaux sont à invariants distincts ou bien tous à invariants égaux.

Parmi les transformés de Lévy d'un réseau (x) à invariants constants, il y en a une infinité, dans un sens et dans l'autre, aux mêmes invariants que le réseau (x). On peut démontrer que cette propriété caractérise les réseaux à invariants constants.

4. Des considérations géométriques que je ne peux pas développer ici montrent que parmi les réseaux à invariants constants il y a une infinité de réseaux R de notre espace.

GÉOMÉTRIE. — *Une nouvelle conception de l'espace physique.* Note de M. **Jean-Louis Destouches**, présentée par M. Louis de Broglie.

En mécanique ondulatoire, on admet parmi les premiers postulats l'existence d'un espace euclidien à trois dimensions, dit espace physique (où l'on sait définir des trièdres de référence), dans lequel se déplacent les corpuscules. La construction d'une théorie qui soit véritablement physique exige donc l'existence réelle de trièdres, ainsi que de règles pour mesurer les distances, d'horloges pour mesurer le temps. Or, si ces objets existent en mécanique macroscopique qui dérive de la notion de corps solide et de celle de déplacement, ils ne peuvent plus avoir de réalité tout au moins *a priori* dans un univers où l'on n'admet que l'existence de corpuscules, comme le suppose la théorie atomique.

Pour lever cette difficulté, la première pensée qui vient à l'esprit est de diviser les objets physiques en deux classes : a, ceux qui sont à notre échelle

et dont les mouvements suivent les lois de la physique classique; grâce à ces corps nous pouvons définir des trièdres de référence; b, les corpuscules qui constituent les éléments des atomes pour lesquels la mécanique ondulatoire nous fournit des lois de mouvement par rapport à un trièdre galiléen.

Il importe ensuite que, par une étude des systèmes de corpuscules, on établisse la possibilité pour certains systèmes de constituer un corps solide, ou tout au moins la possibilité de définir des trièdres de références physiques. Voilà qui justifierait la distinction faite au début entre les deux sortes d'objets physiques en établissant que les corps solides ne sont que certains ensembles de corpuscules.

Mais, outre qu'une telle méthode est compliquée, elle ne saurait constituer qu'un pis aller, car si elle démontre la cohérence de la mécanique ondulatoire, elle n'est pas une théorie atomique constructive puisqu'elle présuppose la connaissance du corps solide. Il convient donc de chercher une autre méthode qui ne fasse pas appel, tout au moins comme notion première, à des dérivés de la notion de corps solide. Celle-ci d'ailleurs ne sert pas seulement de base à la mécanique classique, mais aussi à la géométrie euclidienne et à la notion d'horloge. Par suite, les notions d'espace euclidien et d'espace-temps disparaissent et ne peuvent plus avoir qu'un sens statistique qui devra apparaître au cours du développement de la théorie constructive.

Le fait de renoncer totalement et non plus seulement apparemment à la notion de corps solide entraîne aussitôt l'abandon de toutes les notions usuelles. Nous restons seulement avec les corpuscules dont les expériences récentes nous conduisent à postuler l'existence sans que nous puissions nous en faire une image. Dans ces conditions, voici la construction que nous proposons d'un espace physique directement basé sur la notion de corpuscule : *Concept corpuscule.*

Postulat 1. — *Les corpuscules se rangent en plusieurs classes caractérisées par certains nombres comme la masse et la charge. Deux corpuscules d'une même classe sont indiscernables l'un de l'autre.*

Postulat 2. — *On peut caractériser des ensembles de corpuscules*, c'est-à-dire qu'on peut définir une correspondance biunivoque entre des corpuscules et certains ensembles abstraits, et qu'on sait reconnaître si un corpuscule appartient ou non à un ensemble donné.

Ceci admis, nous devons chercher à organiser des ensembles de corpuscules dans un espace à la manière dont M. Fréchet introduit des considérations topologiques dans des classes abstraites.

L'espace que nous allons définir jouera le rôle d'espace physique qui était dévolu à l'espace euclidien dans les théories classiques.

Lorsqu'on veut construire physiquement l'espace euclidien à partir de la notion de corps solide, on introduit à côté des corps solides considérés des éléments fictifs dits géométriques qui les prolongent.

Pour construire l'espace physique en partant de la notion de corpuscule, nous devons faire de même, et si nous voulons introduire des considérations géométriques, associer aux corpuscules des éléments fictifs que nous appellerons *corpuscules fictifs*, lesquels peuvent être imaginés comme des cases où se placeront des corpuscules réels.

La notion de proximité étant la notion fondamentale de la topologie, il nous faut définir les voisinages d'un corpuscule. Comme premier voisinage nous adopterons l'ensemble du corpuscule considéré et des positions que pourrait occuper un corpuscule qui serait en choc avec lui. Deux corpuscules *en choc* a et b seront encore dits *en contact* ou *conjugués* et désignés par $(a \mid b)$. Nous introduisons donc le *concept corpuscules conjugués*.

Par définition, *un corpuscule (réel ou fictif) sera dit appartenir au $n^{\text{ième}}$ voisinage d'un corpuscule s'il appartient ou bien au $(n-1)^{\text{ième}}$ voisinage, ou bien au premier voisinage de l'un quelconque des corpuscules du $(n-1)^{\text{ième}}$ voisinage*.

Postulat 3. — *L'espace corpusculaire* ($\mathfrak{C}$) *est un continu*, c'est-à-dire connexe et fermé.

Postulat 4. — *Le premier voisinage de tout corpuscule est fini*, c'est-à-dire que l'espace ($\mathfrak{C}$) est un espace de Linfield [1].

Il est naturel d'admettre que l'espace physique est homogène, d'où :

Postulat 5. — *L'espace* ($\mathfrak{C}$) *est topologiquement homogène.*

Postulat 6. — *Enfin l'espace* ($\mathfrak{C}$) *a trois dimensions au sens de Linfield* [1], c'est-à-dire qu'il existe des ensembles de quatre points tous conjugués entre eux (nœuds).

Ces postulats déterminent un espace et ils ne sont pas contradictoires. En effet, il suffit de citer un exemple : si l'on considère un pavage de l'espace euclidien en cubes et que l'on prenne pour premier voisinage d'un cube donné l'ensemble des cubes ayant au moins un sommet en commun avec ce cube, on constate aisément que l'espace ayant pour points ces cubes est un espace satisfaisant aux postulats que nous avons énoncés.

---

(1) B. Z. Linfield, *Thèse de Doctorat*, Strasbourg, 1925.

Dans l'espace ($\mathfrak{C}$), à l'encontre de l'espace euclidien, nous n'aurons pas à introduire des postulats de caractère non purement topologique.

Il reste à montrer qu'à partir de cet espace on retrouve l'espace euclidien à l'échelle macroscopique.

GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE. — *Quadriques à un paramètre touchant leur enveloppe suivant deux coniques.* Note de M. B. GAMBIER.

1. La quadrique à un paramètre, la plus générale dont la caractéristique se décompose en deux coniques, est représentable par l'équation

$$(1)\qquad Q \equiv \int_{\lambda_0}^{\lambda} (\alpha x + \alpha' y + \alpha'' z + \alpha''' t)(\beta x + \beta' y + \beta'' z + \beta''' t)\, d\lambda + Q_0,$$

où Q_0 est une quadrique, numérique par rapport à λ, et où $\alpha, \alpha', \ldots, \beta'''$ désignent des fonctions de λ arbitraires. Chaque conique caractéristique a pour lieu une surface admettant ∞^1 coniques et, le long de chacune, une quadrique de raccord. On retrouve ainsi les surfaces (B) que M. Blutel a étudiées dans sa Thèse [1], en se bornant comme quadrique de raccord au cône circonscrit du second degré : l'avantage de l'introduction de la quadrique de raccord générale, c'est qu'elle fait intervenir une fonction arbitraire d'un argument et fait ainsi correspondre à toute surface (B) déjà connue une infinité de surfaces *associées* de même définition, dépendant d'une fonction arbitraire. Cela permet, en remarquant qu'une quadrique *arbitraire numérique* Q_0, choisie à l'avance et découpée par les plans tangents P d'une développable, est une surface (B), d'obtenir la surface (B) générale au moyen de cette quadrique initiale par trois transformations de la nature précédente : on écrit

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{lll} Q_1 \equiv Q_0 + \varphi P^2, & \dfrac{dQ_1}{d\lambda} = PP_1 & P_1 = \varphi' P + 2\varphi P', \\ Q_2 \equiv Q_1 + \varphi_1 P_1^2, & \dfrac{dQ_2}{d\lambda} = P_1 P_2, & P_2 = \varphi'_1 P_1 + 2\varphi_1 P'_1 + P, \\ Q_3 \equiv Q_2 + \varphi_2 P_2^2, & \dfrac{dQ_3}{d\lambda} = P_2 P_3, & P_3 = \varphi'_2 P_2 + 2\varphi_2 P'_2 + P_1, \end{array}\right.$$

formules où φ, φ_1, φ_2 sont des fonctions de λ arbitraires; P désigne $x + \lambda y + z f_1 + t f_2$ où f_1 et f_2 sont deux autres fonctions arbitraires de λ;

---

[1] *Annales de l'École Normale*, 3e série, 7, 1890, p. 155.

la conique définie par les équations $Q_3 = 0$, $P_3 = 0$ engendre la surface (B) générale qui dépend de cinq fonctions arbitraires d'une variable. Enfin la quadrique *générale* Q de la formule (1) peut être représentée, *sans aucun signe de quadrature* par l'équation obtenue en poussant la transformation un rang plus loin,

$$(3) \qquad Q \equiv Q_3 + \varphi_3 P_3^2, \qquad \frac{dQ}{d\lambda} = P_3 P_4, \qquad P_4 = \varphi'_3 P_3 + 2\varphi_3 P'_3 + P_2.$$

Il est très remarquable que les 10 quadratures $\int \alpha\beta\, d\lambda, \ldots, \int (\alpha\beta' + \alpha'\beta)\, d\lambda \ldots$ que l'on a à effectuer dans (1) puissent être ainsi exprimées toutes en termes finis grâce à ce procédé si simple. Pour une même surface (B), *en faisant varier la quadrique* Q_0 *numérique de départ*, on obtient une représentation (2) bien déterminée, quand Q_0 est choisie. La représentation *canonique* s'obtient en supposant que Q_0 disparaisse identiquement.

La forme (1) démontre aussitôt le résultat suivant : *si les plans des deux coniques caractéristiques passent tous deux par un même point fixe* O, *le lieu des sommets des cônes circonscrits à* Q (*ou aux deux surfaces* B *déduites de* Q) *le long de la conique caractéristique est une courbe plane située dans le plan polaire de* O *relativement à* Q_0 ; c'est évident si, par homographie, on prend pour O le point (0, 0, 0, 1). On remarquera d'ailleurs que la définition des surfaces (B) est *dualistique*.

2. Si β, β', β'', β''' coïncident respectivement avec α, α', α'', α''' la quadrique Q est osculatrice à son enveloppe le long de la conique. Quand les deux coniques sont distinctes, il est clair que la congruence formée par les génératrices de Q, *dans l'un ou l'autre système*, admet pour nappes focales les deux surfaces associées (B_1), (B_2) engendrées par les deux coniques; si donc les deux coniques se confondent, les deux nappes focales se confondent aussi, de sorte que les génératrices des quadriques sont *les tangentes asymptotiques de la surface unique*, (B) *obtenue* quand chaque quadrique est osculatrice à son enveloppe. Quand on donne *a priori* une surface (B), pour reconnaître si parmi les quadriques de raccord, il y en a qui sont osculatrices à (B), il suffit d'appliquer le criterium suivant : chaque conique tracée sur (B) a une enveloppe qu'elle touche en deux points K, K'; le cône circonscrit à B le long d'une conique admet une développable enveloppe qu'il touche suivant deux génératrices SH, SH'; en appelant H, H' les pieds sur la conique de ces deux génératrices, il est nécessaire et suffisant que les deux points H, H' coïncident avec les points K et K'.

3. En revenant aux surfaces (B) générales, M. Blutel a démontré que

les conjuguées des coniques divisent homographiquement ces coniques; de cette belle proposition résulte que l'on peut donner une représentation paramétrique explicite des coordonnées de la surface au moyen des variables λ, μ où les courbes $\lambda = \text{const.}$ sont les coniques, les courbes $\mu = \text{const.}$ les conjuguées des coniques. J'ai donné une démonstration purement géométrique de cette proposition. Dans le cas général, en chaque point de l'arête de rebroussement de la surface B, arête constituée par l'enveloppe de la conique, il ne passe qu'une asymptotique de la surface, admettant ce point comme point triple à tangente unique; l'image de l'asymptotique sur le plan auxiliaire (λ, μ) est tangente à la conjuguée $\mu = \text{const.}$, tandis que sur la surface elle est au contraire tangente à la conique $\lambda = \text{const.}$

4. La surface $x^3 + 3yzt = 0$ admet trois séries de quadriques osculatrices le long d'une conique. La surface réglée générale du troisième degré admet deux séries de coniques lui assurant la nature B et ces deux séries de coniques forment précisément un système doublement de Kœnigs; les cyclides de Dupin possèdent la propriété analogue.

THÉORIE DES ENSEMBLES. — *Sur la mesure des aires dans les espaces de Finsler.* Note de M. St. Golab, présentée par M. Élie Cartan.

Dans les espaces de Finsler la métrique est définie au moyen d'une fonction

$$(1) \qquad \mathcal{F}(x^1, \ldots, x^n; p^1, \ldots, p^n),$$

qui est positive et en outre positivement homogène de degré 1 par rapport aux variables $p^1, \ldots, p^n$. La fonction $\mathcal{F}$ dépend donc non seulement du point $x^1, \ldots, x^n$, mais encore de l'élément linéaire (ou de l'élément d'appui) $p^1, \ldots, p^n$. C'est la cause pour laquelle les questions métriques ne se présentent pas sous une forme aussi claire et univoque que dans les espaces riemanniens. Pour les ensembles à une dimension on n'a pas de difficultés parce qu'on peut en général déterminer en chaque point d'un tel ensemble une direction d'une façon univoque, notamment la direction tangente, tandis que pour les ensembles à plusieurs dimensions un tel choix n'est pas possible. Bornons-nous au cas des surfaces (ensembles à deux dimensions) et supposons (ce qu'on peut faire sans restreindre la généralité du raisonnement) que notre espace de Finsler possède lui-même deux dimensions ($n = 2$). Envisageons une portion bornée (D) de notre espace et dans le domaine (D)

une congruence de courbes donnée par l'intermédiaire des équations

$$x^i = \varphi^i(t, a) \qquad (i = 1, 2), \tag{2}$$

où t varie le long des courbes de la congruence, a étant le paramètre de la famille. M. Landsberg a défini la mesure du domaine (D) en fonction de la congruence choisie (2) de la façon suivante. Désignons par $\mathcal{G}$ la valeur commune des rapports

$$\mathcal{G}(x^1, x^2; p^1, p^2) = \frac{\mathcal{F}_{11}}{(p^2)^2} = -\frac{\mathcal{F}_{12}}{p^1 p^2} = \frac{\mathcal{F}_{22}}{(p^1)^2}, \tag{3}$$

où nous avons posé

$$\mathcal{F}^i = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_i}, \qquad \mathcal{F}_{ij} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial p^i \partial p^j}. \tag{4}$$

La mesure Ω du domaine (D) est ensuite définie comme l'intégrale

$$\Omega = m(\mathrm{D}) = \iint_{(\mathrm{D})} \sqrt{\mathcal{F}^3 \mathcal{G}}\, dx^1\, dx^2. \tag{5}$$

Dans la fonction sous le signe de l'intégrale, il faut substituer

$$p^i = \frac{\partial \varphi^i}{\partial t}, \tag{6}$$

et en outre, au lieu de (t, a), les composantes de la transformation réciproque à (2). Dans le cas spécial où

$$\mathcal{F} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(x^1, x^2)\, p^i p^j}, \tag{7}$$

c'est-à-dire où l'espace est riemannien, la valeur Ω est indépendante du choix de la congruence (2) et se confond avec la mesure classique de la géométrie de Riemann. L'invariant intégral Ω dépend évidemment des deuxièmes dérivées de la fonction $\mathcal{F}$.

Or on peut définir la mesure du domaine (D) d'une autre façon comme invariant intégral du premier ordre, notamment

$$\overline{m}(\mathrm{D}) = \overline{\Omega} = \int\int_{(\mathrm{D})} \mathcal{F}\left[x^1, x^2; -\mathcal{F}_2\left(x^1, x^2; \frac{\partial \varphi^1}{\partial t}, \frac{\partial \varphi^2}{\partial t}\right), \mathcal{F}_1\left(x^1, x^2; \frac{\partial \varphi^1}{\partial t}, \frac{\partial \varphi^2}{\partial t}\right)\right] dx^1\, dx^2. \tag{8}$$

On démontre facilement que $\overline{\Omega}$ dépend seulement du choix de la congruence (2) et ne dépend pas de la représentation paramétrique de cette

congruence. Dans le cas spécial (7), la formule (8) se réduit à la formule classique

$$\bar{\Omega} = \iint_{(D)} \sqrt{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2}\, dx^1\, dx^2, \tag{9}$$

et, dans ce cas-là, $\bar{\Omega}$ est indépendante de la famille (2).

Quelques applications de la définition précédente seront indiquées ailleurs.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la méthode du balayage de Poincaré étendue par M. de La Vallée Poussin, et ses rapports avec le problème de Dirichlet généralisé.* Note de M. **Florin Vasilesco**, présentée par M. Henri Villat.

On connaît les résultats, extrêmement importants, obtenus par M. de La Vallée Poussin, dans l'étude des masses issues du balayage qu'il a eu l'idée de faire (1). On peut compléter ces résultats, grâce au raccord qu'il y a lieu de faire entre la méthode employée par lui et le problème de Dirichlet généralisé. Voici d'abord quelques résultats utiles relatifs aux fonctions harmoniques, en général, ainsi qu'à ce dernier problème.

I. *Il ne peut y avoir deux fonctions harmoniques bornées, distinctes, dans un domaine* Ω *(ensemble ouvert), si leur différence tend vers zéro partout sur sa frontière* Σ *(bornée), sauf sur un ensemble impropre de celle-ci* (2).

M. G. C. Evans, ayant démontré récemment (3) que tout ensemble de capacité positive a au moins un point régulier, il en résulte, comme nous l'avions énoncé autrefois (*loc. cit.*, p. 110, n° 45), que :

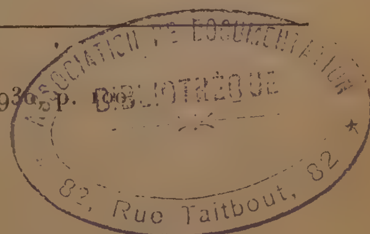
L'ensemble des points irréguliers de la frontière d'un domaine est impropre.

On conclut de là l'énoncé qui suit :

II. *Si deux fonctions harmoniques bornées dans* Ω *coïncident aux points réguliers de* Σ, *elles sont identiques.*

III. *Si une fonction harmonique bornée dans* Ω *est continue aux points de* Σ, *sauf aux points d'un ensemble* s *de capacité nulle de celle-ci, elle admet dans* Ω *le même maximum et minimum que sur* $\Sigma - s$.

(1) *Annales de l'Institut Poincaré*, 3, 1932, p. 175.
(2) Voir Florin Vasilesco, *Journ. de Math.*, 9, fasc. I, 1930, p. 86.
(3) *Proc. N. Acad. of Sc.*, 19, 1933, p. 457.



Relativement au problème Dirichlet généralisé, on a le résultat suivant :

IV. *On peut définir la solution du problème de Dirichlet généralisé au moyen de domaines normaux tendant vers* Ω *d'une manière quelconque, et non plus seulement par l'intérieur de* Ω. *On suppose* Ω *sans frontière intérieure* (*loc. cit.*, 9, p. 99, n° 29).

En effet, si $F(P)$ est une fonction continue dans une région contenant Σ, qui coïncide avec les valeurs données $F(p)$ sur Σ, on voit qu'il suffit d'examiner le cas de $F(p)$ sous-harmonique (¹). Alors il y a une fonction harmonique limite lorsqu'on s'approche de Ω par des domaines normaux extérieurs, et il suffit de montrer que cette limite coïncide avec celle obtenue par l'intérieur. D'après II, il suffit encore de montrer que ces deux fonctions coïncident aux points réguliers. Pour le voir, on peut considérer un domaine normal D (il en existe) contenant $\Omega + \Sigma$ à l'intérieur, et n'ayant sur sa frontière f qu'un point régulier p de Σ. Si σ_n est une sphère de rayon ε_n, centrée en p, et $v_n(P, p)$ la fonction harmonique dans $D + \sigma_n$ prenant en un point q de sa frontière la valeur $r = \overline{pq}$, les fonctions harmoniques prenant sur Σ_k, frontière d'un domaine normal approchant Ω par l'extérieur, sont, pour K assez grand, comprises entre

$$F(p) + \frac{M}{b} v_n(P, p) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad F(p) - \frac{M}{b} v_n(P, p) - \frac{\varepsilon}{2},$$

où M et b sont des constantes et σ une sphère où $|F(P) - F(p)| < \varepsilon/2$. Il en est de même de leur limite. Mais les v_n tendent vers la fonction harmonique dans D, pareillement définie et égale à zéro en p. Le théorème en résulte. La démonstration est à peine modifiée si Ω est non borné.

Venons-en aux recherches de M. de La Vallée Poussin (*loc. cit.*, p. 200 et suiv.). On a les résultats suivants :

V. *Si* S *est une surface irrégulière simple ou multiple, le balayage d'une masse définie comme une fonction d'ensemble située dans le domaine* A *qu'elle limite, masse dont le potentiel* U *est continu sur* S, *donne une distribution* $\mu(S)$, *dont le potentiel* V *est égal à* U *à l'extérieur de* S, *est déterminé sur* S, *et est égal à la solution du problème de Dirichlet généralisé dans* A, *pour les valeurs* U *sur* S.

Grâce à l'unicité de cette solution, on a le théorème suivant :

VI. Théorème d'unicité. — *Il n'y a qu'une distribution sur* S *donnant un*

(¹) Voir G. Bouligand, *Ann. Soc. polonaise de Math.*, 9, 1925, p. 75.

potentiel égal à U, à l'extérieur de S, et inférieur à U, à l'intérieur : celle, μ(S), issue du balayage.

On le voit en remarquant que s'il y en avait une autre, μ'(S), de potentiel V', en faisant son balayage sur une surface régulière extérieure à S et tendant vers elle, le potentiel intérieur diminue et tend (IV) vers la solution du problème de Dirichlet généralisé dans S, donc vers V, qui, d'autre part, se définit à l'aide de U à l'intérieur de S. Donc V' coïncide avec V, et le théorème de Gauss montre que μ(S) = μ'(S).

VII. Valeur du potentiel sur S. Continuité. — *Le potentiel dû à la distribution* μ(S) *prend, en tout point* Q̇ *de* S, *pour valeur, la plus petite limite* U(Q) — λ *de ses valeurs intérieures à* S *en ce point.*

Il est donc continu en tout point de S *où sa limite par l'intérieur est unique, donc égale à* U(Q). *Ces points contiennent tous les points réguliers de* S, *et, en particulier, ceux en lesquels* S *satisfait à la condition de Poincaré.*

Par exemple, le balayage d'une masse unité concentrée en un point P du domaine donne une distribution μ(S, P), dont le potentiel est égal à $1/r$ — G(M, P), G(M, P) étant la fonction de Green généralisée. Il est donc continu aux points réguliers, et discontinu aux points irréguliers.

Si le domaine A est non borné, les résultats précédents sont encore valables, mais la masse ne vient plus tout entière sur S, qui peut être formée d'une ou plusieurs surfaces. En ce cas, on a le résultat suivant :

VIII. Problème de Robin. — *On peut trouver, à volonté, une distribution sur* S, *dont la masse soit donnée et produise un potentiel constant dans* S, *ou bien dont la masse produise un potentiel constant donné dans* S. *Une telle distribution, si elle provient du balayage, est unique.*

Si la constante est l'unité, la distribution est celle d'équilibre et donne le potentiel conducteur.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur les fonctions continues d'une variable réelle qui possèdent un théorème d'addition algébrique.* Note de M. **Robert Meynieux**, présentée par M. Hadamard.

1. D'après Weierstrass, si une fonction analytique $f(x)$ admet un théorème d'addition algébrique $F[f(x), f(y), f(x+y)] = 0$, où $F(X, Y, Z)$ est un polynome à trois variables, cette fonction est fonction algébrique, ou bien de x, ou bien de e^{mx} (m désignant une constante), ou bien d'une

fonction elliptique px (1). Nous désignerons de telles fonctions par l'expression fonctions W : ces fonctions se répartissent en corps algébriquement fermés. M. Kœbe (*loc. cit.*) a montré que si dans le théorème on remplace $f(x)$, $f(y)$ et $f(x+y)$ par trois fonctions différentes $f(x)$, $g(y)$, $h(x+y)$, ces fonctions sont des fonctions W d'un même corps.

M. J. F. Ritt (2) cherche une fonction réelle continue $f(x)$ de la variable réelle x, définie dans l'intervalle $0 \leq x \leq a$ et admettant un théorème d'addition algébrique; en supposant la fonction non constante et le polynome $F(X, Y, Z)$ irréductible, il trouve, parmi d'autres résultats, celui-ci : l'intervalle $(0, a)$ peut être partagé en un nombre fini d'intervalles partiels dans chacun desquels $f(x)$ coïncide avec une fonction W toujours d'un même corps. M. Montel (3), étudiant indépendamment le même problème, donne en particulier de ce théorème une nouvelle démonstration qu'il suffit de modifier légèrement pour résoudre le problème suivant :

Étant donné trois variables x, y, z, liées par la relation $x+y+z=0$, et le domaine Δ défini par les intervalles $a \leq x \leq a'$, $b \leq y \leq b'$, $c \leq z \leq c'$, quelles sont les fonctions continues $X=f(x)$, $Y=g(y)$, $Z=h(z)$, qui vérifient dans Δ une équation algébrique $F(X, Y, Z)=0$? Si aucune des trois fonctions n'est constante dans un intervalle partiel, on trouve que *ces fonctions coïncident, par morceaux en nombre fini, avec des fonctions* W, *toutes d'un même corps* (même si le polynome F est réductible).

Quand le polynome $F(X, Y, Z)$ est irréductible, on peut, en généralisant une démonstration de M. Ritt (*loc. cit.*), démontrer la relation suivante entre les diverses fonctions W avec lesquelles peut successivement coïncider $f(x)$: *si* $f_0(x)$ *est l'une d'elles, les autres sont de la forme* $f_0(\varepsilon x+\alpha)$, *où* α *est une constante, et* ε *une racine de l'unité.* Mais il n'est plus vrai, comme dans le cas où se place M. Ritt, qu'on puisse toujours prendre $\varepsilon=1$; on peut seulement dire qu'on peut prendre pour ε une racine d'ordre 2^m, où $m \geq 0$.

2. Considérons $n+2$ fonctions continues $X_1=f_1(x)$, $X_2=f_2(x)$, ..., $X_n=f_n(x)$, $Y=g(y)$, $Z=h(z)$, et supposons qu'elles vérifient dans Δ

---

(1) Pour la démonstration, voir, par exemple, E. PHRAGMÉN, *Acta mathematica*, 7, 1885, p. 33-42; P. KŒBE, *Inaugural Dissertation*, (Berlin, 1905; *Mathematische Abhandlungen H. A. Schwarz zu seinem fünfzigjährigen Doctorjubiläum gewidmet*, 1914, p. 192-214).

(2) *Transactions of the American Mathematical Society*, 29, 1927, p. 361-368.

(3) *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 3e série, 48, 1931, p. 65-94.

une équation algébrique $F(X_1, \ldots, X_n, Y, Z) = 0$. Supposons de plus que $g(y)$ et $h(z)$ ne soient constantes dans aucun intervalle partiel, et que dans aucun intervalle partiel il n'y ait entre les $f_i(x)$ de relations algébriques qui suffisent à annuler F. On trouve alors ceci : *les fonctions $g(y)$ et $h(z)$ coïncident, par morceaux en nombre fini, avec des fonctions W toutes d'un même corps; et l'on peut partager l'intervalle de variation de x en un nombre fini d'intervalles partiels, dans chacun desquels il y a, entre les $f_i(x)$ et les fonctions W de la variable x appartenant au corps considéré, certaines relations algébriques qui, avec $Y = g(y)$, $Z = h(z)$ et $x + y + z = 0$, entraînent* $F = 0$. La démonstration repose sur la considération d'une infinité continue d'hexagones, à côtés parallèles aux axes, inscrits dans trois courbes du plan des Y, Z obtenues à partir de l'équation $F = 0$ en donnant à x trois valeurs convenables.

DYNAMIQUE DES FLUIDES. — *Le maximum de probabilité dans les mouvements permanents. Application à la turbulence.* Note ([1]) de MM. **G. Dedebant, Ph. Wehrlé, Ph. Schereschewsky**, présentée par M. R. Bourgeois.

1. *Probabilité d'une configuration à une échelle quelconque.* — Soit un volume fluide composé de N particules de coordonnées (ξ, η, ζ) et de vitesse (U, V, W). Dans l'espace généralisé à six dimensions « position-vitesse », de volume total G et de volume élémentaire dg, ces N particules sont représentées par N points. La probabilité ϖ de la « configuration » définie par la loi de distribution : $dn = NF(\xi, \eta, \zeta; U, V, W)\,dg$, a pour logarithme

$$\log\varpi = -N\left(\log G + \int_G F \log F \, dg\right).$$

La fonction F satisfaisant d'ailleurs à la condition $\int_G F\,dg = 1$.

Contrairement à l'habitude prise en mécanique statistique de ne considérer que le nombre de cas favorables (le numérateur de ϖ), la formule précédente tient compte du nombre de cas possibles (le dénominateur de ϖ) et représente par conséquent la probabilité elle-même. Il est à noter que l'expression complète de ϖ contient une part d'arbitraire qui est N (les

([1]) Séance du 7 janvier 1935.

dimensions et la nature de la particule élémentaire dépendant de l'échelle adoptée). On ne pourra donc comparer *objectivement* que les probabilités de configurations de systèmes offrant *le même degré de complexité*.

Admettant que les probabilités de position et de vitesse sont *indépendantes*, F est le produit de deux fonctions $h(\xi, \eta, \zeta)$ et $f(U, V, W)$, et l'espace G se divise en deux espaces à trois dimensions O et Ω.

La condition classique $\int_G F\, dg = 1$ se dissocie en deux :

$$\int_0 h\, do = 1 \quad \text{et} \quad \int_\Omega f\, d\omega = 1.$$

Si le fluide est *homogène*, la fonction h a la valeur constante $1/V$, V étant le volume *effectivement occupé* par le fluide.

Sous réserve que le *théorème de Liouville* soit applicable, l'expression de la probabilité devient alors

$$\log \varpi = -N \left[\log G - \log V + \int_\Omega f \log f\, d\omega \right].$$

Si l'on prend l'écart type des vitesses et le volume du fluide comme unités de mesure, $\log V$ devient nul, et la nouvelle fonction de distribution des vitesses $\varphi(u, v, w) = f(U/\sigma, V/\sigma, W/\sigma)$ ainsi que le nouvel élément différentiel $d\omega_0 = d\omega/\sigma^3$ deviennent des nombres sans dimensions. Quant au volume G de l'espace généralisé position-vitesse, il est divisé par $\sigma^3 V$, et l'on a

$$\log \varpi = -V \left[\log G - \log(\sigma^3 V) + \int_{\Omega_0} \varphi \log \varphi\, d\omega_0 \right].$$

2. *Application au mouvement turbulent.* — Nous avons montré dans une Note précédente [1] que, dans un mouvement turbulent de vitesse macroscopique $u_0(y)$ parallèle à un axe, la fonction de distribution des vitesses turbulentes, rapportées à leur écart type, était $\varphi = \varphi_0(1 + \eta)$, où φ est la *loi normale* réduite de Gauss et η un terme auquel des considérations d'invariance et d'analyse dimensionnelle imposent la forme

$$\eta = (a\tau u_0')uv + (b\sigma\tau')u,$$

τ étant l'échelle de temps nécessaire pour qu'en chaque point de cote y du fluide, on observe le même nombre de fluctuations N dans la vitesse, condition essentielle pour rendre *comparables* les probabilités aux différents

---

(1) *Comptes rendus*, 198, 1934, p. 1571.

points. Les lettres a et b désignent des nombres purs dépendant seulement de la nature du fluide et des parois qui l'enferment.

Le volume occupé par les N particules passant au point y est proportionnel à τ^2, et l'homogénéité de leur distribution dans ce volume résulte de la continuité. La formule précédente permet donc d'évaluer la probabilité ϖ au point y et, par voie de probabilités composées, la probabilité π de l'état du fluide *entier*, caractérisé par les variables macroscopiques $u_0(y)$, $\sigma(y)$, $\tau(y)$. Les termes du premier degré en η disparaissant par intégration, on obtient

$$\log\pi = \mathrm{N}\left\{\text{const.} + \frac{1}{y_1 - y_0}\int_{y_0}^{y_1} dy[\log(\sigma^2\tau^2)\,(^1) - (a_1\tau^2 u_0'^2 + b_1\sigma^2\tau'^2)]\right\},$$

a_1 et b_1 étant deux constantes numériques, d'ailleurs positives.

3. *Maximum de probabilité.* — Le théorème de Liouville est applicable normalement aux systèmes conservatifs. Nous avons pu l'étendre aux systèmes dissipatifs en régime permanent. Ceci posé, exprimons que la probabilité π est maxima pour le mouvement macroscopique *permanent*, par rapport à toutes les distributions de vitesses macroscopiques correspondant *au même débit*, ce qui revient à ajouter la condition adjointe

$$\int_{y_0}^{y_1} u\, dy = \text{const.},$$

la densité du fluide étant prise égale à l'unité.

Le calcul des variations donne trois équations différentielles admettant la solution particulière suivante :

$$\tau^2 u_0' \sim y, \qquad \sigma\tau' = \text{const.}, \qquad \tau u_0' = \text{const.}$$

Les deux dernières relations ont déjà été obtenues par application du principe de similitude statistique (*loc. cit.*); elles permettent de retrouver les relations de Von Karman (*loc. cit.*). Quant à la première, elle conduit immédiatement à la loi logarithmique ($u_0 \sim \log y$) de distribution de la vitesse macroscopique à partir d'une paroi, dans un mouvement turbulent.

Il est intéressant de remarquer que le maximum de probabilité coïncide ici avec *l'uniformité* des probabilités aux différents points du fluide, ces probabilités devant être évaluées en les rendant par un changement d'échelle, comparables quant aux éléments subjectifs qu'elles comportent [même N, même volume d'espace *réduit* $G_0 = G/(\sigma^2\tau^2)$].

(1) On a σ^2 au lieu de σ^3, le problème étant à deux dimensions.

MÉCANIQUE DES FLUIDES. — *Contribution à l'étude des multiplans infinis en courant plan.* Note [1] de M. **Albert Toussaint**, présentée par M. H. Villat.

L'application, au cas des multiplans comportant un nombre infini d'éléments, de la méthode de calcul exposée dans une précédente Note [2], peut être faite à partir de l'expression suivante qui donne la vitesse induite w_i, par une aile sustentatrice en des points z, modérément rapprochés

$$w_i = \frac{V_0 a^2 e^{-i\alpha}}{z^2} - \frac{V_0 c^2 e^{i\alpha}}{z^2} + \frac{\Gamma}{2i\pi z} + \frac{\Gamma m}{2i\pi z^2}. \tag{1}$$

Cette expression de w_i correspond à celle adoptée précédemment avec le terme supplémentaire $m\Gamma/2i\pi z^2$ provenant du doublet $-m\Gamma/2i\pi z$, dont l'influence ne peut être négligée dans le cas des multiplans infinis (m est le module de l'affixe du centre du cercle génératenr).

Pour un multiplan infini l'interaction d'un profil k sur le profil a se traduira par une circulation induite $\Gamma_{(k-a)}$ et une vitesse supplémentaire $u_{(k-a)}$ produites au droit du profil a, par le *système de remplacement* du profil k lequel est donné par les trois doublets et le tourbillon déduits de l'expression (1).

Tous les éléments du multiplan comportent la même circulation résultante : $\Gamma_a = \Gamma_K = \Gamma$; la composante $v^{B'}_{(k-a)}$, produite au point B′ du profil a $(z_{(B')} = -b\,e^{i\theta'} - c)$ sera

$$\left(\frac{v_{B'}}{V_0}\right)_{(k-a)} = -\alpha\frac{(a^2+c^2)\,A_{(k)}\,l^2}{D_k^2} + \frac{(a^2-c^2)\,B_k}{D_k^2}\,\frac{bl}{2}\sin\theta' - \frac{\Gamma l B_{(k)}}{8\pi V_0 D_K} - \frac{m\Gamma A_{(k)}\,l^2}{2\pi V_0 D_k^2}, \tag{2}$$

avec

$$\left\{\begin{aligned} A_{(k)} &= \frac{-1}{l^2}(b^2\cos 2\theta' + 2bc\cos\theta' + c^2),\\ B_{(k)} &= \frac{4}{l}(b\cos\theta' + c),\\ D_{(k)} &= b^2 + 2bc\cos\theta' + c^2,\\ k\frac{h}{l} &\simeq \frac{b}{l} + \frac{l}{16b}\,\mathrm{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right). \end{aligned}\right. \tag{3}$$

---

[1] Séance du 7 janvier 1935.

[2] *Comptes rendus*, 199, 1934, p. 700.

Le profil k' symétriquement placé par rapport à a fournira une composante $v^{B'}_{(k'-a)}$ dont l'expression sera analogue à celle de $v^{B'}_{(k-a)}$. En associant ainsi les divers éléments tels que k et k' on obtiendra pour la circulation résultante du profil a :

$$(5)\qquad \Gamma = \Gamma_{(aa)} + \sum_1^\infty \Gamma_{(k+k'-a)} = \frac{\pi V_0 l(1+\eta e)\left\{\alpha\left(1 - \frac{1+\eta e}{8}\Sigma I\right) + \frac{\eta e}{16}\Sigma II\right\}}{1 + \frac{1+\eta e}{8}(\eta e\,\Sigma I + \Sigma III)}$$

avec

$$\eta e = 4\frac{(a-c)}{l}, \qquad c \simeq \frac{l}{4}$$

et

$$(6)\qquad \begin{cases} \Sigma I = \sum_1^\infty \left(\frac{A_{(k)} l^k}{D_k^2} + \frac{A_{(k')} l^{k'}}{D_{k'}^2}\right), \\ \Sigma II = \sum_1^\infty \frac{b}{l}\sin\theta' \left(\frac{B_{(k)} l^k}{D_k^2} + \frac{B_{(k')} l^{k'}}{D_{k'}^2}\right), \\ \Sigma III = \sum_1^\infty \left(\frac{B_k l^2}{D_k} - \frac{B_{k'} l^2}{D_{k'}}\right). \end{cases}$$

La vitesse supplémentaire $u_{\Sigma(k+k')}$ au centre du profil (a) sera

$$(7)\qquad \frac{\Sigma u}{V_0} = \left(\frac{u}{V_0}\right)_{\Sigma(k+k')} = \frac{\pi^2}{24}\frac{l^2}{h^2}[\alpha(1+\eta e)\sin 2\theta - \eta e \cos 2\theta].$$

La sustentation unitaire d'un élément s'écrit

$$(8)\qquad C_{y(mu)} = \frac{2\Gamma}{V_0 l}\left(1 + \frac{\Sigma u}{V_0}\right) = C_{y(m0)}\frac{K_{mu}}{K_{m0}} + \Delta C_{y(\alpha=0)}.$$

$\Delta C_{y(\alpha=0)}$ s'annule quand $\eta e = 0$ (profils sans épaisseur) et aussi pour $\theta = 0$ (tandems infinis) et pour $\theta = \pi/2$ (multiplans droits).

Dans les formules précédentes θ' correspond dans le plan du cercle générateur à l'inclinaison θ du multiplan sur la direction $\alpha = 0$. θ est positif pour les multiplans décalés vers l'avant. Pour les multiplans décalés vers l'arrière ($\theta < 0$), le rapport $K_{(mu)}/K_{(m0)}$ est le même que pour $\theta > 0$, mais $\Delta C_{y(\alpha=0)}$ est de signe contraire, c'est-à-dire négatif.

Le tableau ci-après donne la comparaison des $C_{y(mu)}$ calculés avec les formules précédentes et des $C_{y(mu)}$ déduits d'expériences (1) :

(1) *Untersuchungen über Druckverteilungen an gestaffelten Flügelgittern.* Göttingen, III Lieferung.

Multiplan, décalage $\mathcal{N}$, $\theta = 16°$; $C_{y(m_0)} = 0,492$.

Écartement relatif h/l	2.	1,43.	1,175.	1
$C_{y(mu)}$ calculé	0,616	0,755	0,953	1,293
$C_{y(mu)}$ mesuré	0,691	0,757	0,907	1,14

Les formules précédentes nous ont permis de calculer les valeurs de $K_{(mu)}/K_{(m_0)}$ et de $\Delta C_{y(\alpha=0)}$ pour tous les multiplans caractérisés par $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ et pour divers écartements relatifs $h/l \geq 0,8$. L'application de ces résultats doit être utile pour le calcul des turbines axiales, des hélices, des pompes, des ventilateurs, etc., dont le rotor est assimilable par développement à un multiplan infini.

HYDRODYNAMIQUE. — *Théorèmes de validité dans le problème des sillages.* Note de M. **Julien Kravtchenko**, présentée par M. Henri Villat.

Les solutions du problème des sillages, construites à partir d'une fonction donnée *a priori* doivent satisfaire à deux conditions de validité introduites par M. M. Brillouin [1] : 1° les lignes de jet ne peuvent ni se recouper ni recouper l'obstacle ; 2° les vitesses au sein de la masse fluide en mouvement ne peuvent être supérieures à 1.

La deuxième condition ne s'introduit que quand la pression est nulle à l'infini ; il n'y a besoin de la vérifier que le long des frontières du fluide en mouvement. Quand elle est satisfaite, les lignes de jet sont convexes vers le courant ; dans ce cas la première condition est vérifiée si l'on suppose de plus que l'obstacle est tranchant. Nous nous proposons de compléter la discussion de ces conditions de validité.

Les théorèmes que nous allons faire connaître constituent des extensions de quelques résultats de M. H. Villat [2] (cas de l'obstacle symétrique), et de M. J. Leray [3] (cas du fluide indéfini) ; ils valent dans le cas d'un courant fluide enfermé dans un canal (ou limité par une paroi fixe) qui heurte un obstacle dont l'angle de la tangente positive avec la direction du courant est supposé compris entre zéro et π.

Pour simplifier nos énoncés nous nous limiterons d'abord au cas des

---

(1) *Annales de Physique et de Chimie*, **23**, 1911, p. 154; *Comptes rendus*, **151**, 1910, p. 932.

(2) *Journal de Mathématiques*, 6e série, **10**, 1914, p. 231.

(3) *Comptes rendus*, **199**, 1934, p. 1282.

parois fixes planes; mais chaque théorème peut être étendu (avec un degré de généralité qui varie d'un théorème à l'autre) à certaines classes de parois courbes.

I. *L'ordonnée y de chaque ligne de jet varie toujours dans le même sens le long de chacune d'elles; elle est non décroissante le long de la ligne supérieure et non croissante le long de la seconde. En d'autres termes tout danger de recoupement des lignes de jet est écarté.*

L'artifice de calcul qui permet de déduire ce résultat des formules de M. Villat a été utilisé par M. J. Leray dans son travail cité ci-dessus; il en est de même de la marche suivie pour établir le théorème suivant :

II. *Les vitesses le long des parois fixes sont toujours acceptables.* Voici les éléments de la démonstration dans le cas du canal. En reprenant les notations classiques (¹), la vitesse V en un point de la paroi est donnée par les formules

$$V = e^{\tau}, \qquad \tau(\varepsilon) = \frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{\pi} \Phi(s) \frac{p'\left(\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon + \omega_3\right)}{p\left(\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon + \omega_3\right) - p\,\frac{\omega_1}{\pi}s}\,ds.$$

Appelons s_0 l'argument du point de bifurcation, on aura, en vertu de l'hypothèse $0 \leqq |\Phi(s)| \leqq \pi$,

$$(1) \qquad \begin{cases} \Phi(s) \leqq 0 & \text{pour} \quad 0 < s < s_0, \\ \Phi(s) \geqq 0 & \text{pour} \quad s_0 < s < \pi. \end{cases}$$

Mettons la fonction $\tau(\varepsilon)$ sous la forme

$$\tau(\varepsilon) = \frac{\omega_1}{\pi^2} p'\left(\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon + \omega_3\right) \times \int_0^{\pi} \Phi(s) \left[\frac{1}{p\left(\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon + \omega_3\right) - p\,\frac{\omega_1}{\pi}s} - \frac{1}{p\left(\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon + \omega_3\right) - p\,\frac{\omega_1}{\pi}s_0}\right] ds,$$

en utilisant la condition de M. Villat,

$$\int_0^{\pi} \Phi(s)\,ds = 0.$$

On voit que : 1° la quantité $p'(\omega_1 \varepsilon/\pi + \omega_3)$ est positive quand $0 < \varepsilon < \pi$.

(¹) Voir, par exemple, le Mémoire de M. Villat des *Annales de l'École Normale*, **29**, 1912, p. 127.

2° La quantité entre crochets est positive pour $0 < s < s_0$ et négative pour $s_0 < s < \pi$. Compte tenu de (1) il en résulte que l'expression (2) de τ est négative; c'est-à-dire que e^τ est inférieur à 1.

III. Bornons-nous maintenant au cas de l'obstacle *concave* vers le courant : *les vitesses sont acceptables le long de cet obstacle* ([1]).

En combinant ce résultat avec le théorème II on voit que les vitesses seront acceptables partout; cela assure la convexité des lignes vers le courant. La solution est alors entièrement acceptable d'après le théorème I.

HYDRODYNAMIQUE. — *Sur les théorèmes d'existence relatifs aux ondes permanentes périodiques à deux dimensions dans les liquides hétérogènes.* Note de Mme **Marie-Louise Dubreil-Jacotin**, présentée par M. Henri Villat.

L'étude, en première approximation, des ondes permanentes périodiques dans les liquides hétérogènes incompressibles dans lesquels la diffusion est négligée a donné lieu à un certain nombre de travaux, spécialement dans le cas particulier, important pour les applications, où la répartition de la densité est exponentielle ([2]). Nous nous sommes proposé l'étude rigoureuse de ces ondes.

Des hypothèses d'un mouvement permanent, d'un liquide incompressible et de la non-diffusion, résulte qu'il existe une fonction de courant $\Psi(x, y)$ et que pendant le mouvement la densité d est donnée par $d = f(\Psi)$ ([3]). Le calcul qui permet d'établir l'équation d'Euler dans

---

([1]) M. Leray m'a signalé qu'il avait démontré ce théorème sans le publier dans le cas du fluide illimité.

([2]) Voir Lord Rayleigh, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **14**, 1882-1883, p. 301; Love, *Proc. Lond. Math. Soc.*, 22, 1891-1892, p. 10, etc. On trouvera d'ailleurs une bibliographie et un historique dans B. Haurwitz, *Zur Theorie der Wellenbewegungen in Luft und Wasser* (*Veröff. des Geophysikalischen Institut der Universität Leipzig*, 5, 1, 1931, p. 132).

([3]) V. Bjerknès a attiré l'attention (*Comptes rendus*, **188**, 1929, p. 1382, et *Hydrodynamique Physique*, Paris, 1934) sur la supériorité des coordonnées de Lagrange dans l'étude des fluides non *autobarotropes*. L'équation d'état dans ce système $d = g(c)$ est, en effet, plus simple; mais en écrivant, ce qui est parfaitement légitime, que la densité sur une ligne de courant est celle des particules sur le niveau

le cas homogène donne pour déterminer Ψ l'équation

$$(1) \qquad \Delta\Psi - \frac{f'(\Psi)}{f(\Psi)}\left\{U - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)^2\right]\right\} = h(\Psi),$$

où U est la fonction de force et h une fonction arbitraire. La pression est encore donnée par

$$P = f(\Psi)\left\{U - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)^2\right]\right\} + h_1(\Psi).$$

Pour résoudre le problème hydrodynamique que nous avons en vue, il faut donc, avec les notations et conventions que nous avons utilisées dans l'étude du cas homogène [1], trouver $\Psi(x, y)$ satisfaisant à l'équation (1) dans la bande limitée par l'horizontale $y = H$ sur laquelle on aura $\Psi = q$ et par la courbe limite inconnue qui sera la courbe $\Psi = 0$ et sur laquelle on aura

$$(2) \qquad 2gy - \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)^2 = \text{const.}$$

Nous faisons les mêmes changements de fonction inconnue et de variables que dans le cas homogène pour nous ramener à la couronne limitée par les cercles de rayons ρ_0 et 1, sur lesquels les conditions aux limites sont encore

$$(\text{II}) \quad v = 0 \quad \text{sur} \quad \rho = \rho_0; \qquad \frac{\partial v}{\partial n} + pv - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial v}{\partial n}\, ds = \Phi\left(v, \frac{\partial v}{\partial n}, \frac{\partial v}{\partial s}\right) \quad \text{sur} \quad \rho = 1.$$

L'équation à résoudre est maintenant

$$(\text{I}) \qquad \Delta v + B(\rho)\left[pv - \rho\frac{\partial v}{\partial \rho}\right] = h(\rho) + F\left(v, \frac{\partial v}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right),$$

où F est du deuxième ordre en v et ses dérivées des deux premiers ordres et où $B(\rho)$ est donné.

Si l'hétérogénéité est faible de telle sorte que B soit petit du même ordre

---

moyen avant le mouvement, on a l'équation d'état sous la forme intégrale commode $d = f(\Psi) = g\left[\frac{1}{\lambda}\int_x^{x+\lambda} y(x, \Psi)\, dx\right]$. Remarquons encore qu'avec la terminologie de V. Bjerknès les mouvements étudiés sont *baroclines* : nous avons démontré en effet (*Rend. R. Acc. Lincei*, 15, 1932, p. 814) qu'il n'y avait pas, en général, dans le cas de la profondeur finie, cas auquel nous nous limiterons ici, de mouvements d'ondes *barotropes*.

[1] *Journal de Mathématiques*, 13, 1934, p. 217.

que la hauteur de l'onde, le terme $B(\rho)[pv - \rho\,\partial v/\partial\rho]$ peut s'incorporer à F et le problème est résolu par l'étude du cas homogène, F continuant à satisfaire aux seules hypothèses utilisées dans la démonstration. Supposons donc B non petit. Il résulte de la signification physique de B et de p que ces deux quantités sont essentiellement positives. L'équation linéarisée

$$\Delta v + B(\rho)\left(pv - \rho\frac{\partial v}{\partial \rho}\right) = h(\rho)$$

est donc telle que le problème de Dirichlet correspondant n'a pas nécessairement une solution unique. C'est à ce fait qu'est due la différence essentielle entre les cas homogène et hétérogène ([1]).

On peut remplacer la résolution de l'équation aux dérivées partielles I avec conditions aux limites II par celle d'un système intégrodifférentiel qu'on peut encore remplacer par un système d'équations intégrales qu'on montre être du type de Schmidt, donc résoluble par approximations successives. On démontre que, quelle que soit la répartition de la densité, ce système a des solutions non triviales (non simple translation) au voisinage d'une infinité de valeurs positives de p. La longueur d'onde étant donnée, il y a donc une infinité de mouvements d'ondes possibles tous à l'exception d'un seul ayant des plans nodaux. Il ne reste plus qu'à discuter les équations de ramification, ce qui, en particulier, se fait sans difficulté dans le cas où la densité est supposée, au repos, fonction exponentielle de la cote. Le détail des démonstrations paraîtra dans un autre Recueil.

MÉCANIQUE APPLIQUÉE. — *Micromachine à enregistrement photographique pour l'essai mécanique des métaux.* Note ([2]) de M. **Pierre Chevenard**, présentée par M. Henry Le Chatelier.

En 1919, Ch. Frémont a décrit des machines pour l'essai mécanique des métaux sur petites éprouvettes ([3]). Leur premier avantage est d'être peu

([1]) Lord Rayleigh (*loc. cit.*) a montré le premier que, dans le cas de la répartition exponentielle de la densité, il existait une infinité de mouvements d'ondes possibles entre deux plans fixes. Ce problème peut se traiter rigoureusement d'une manière analogue à celle utilisée pour le problème posé. Le domaine initial étant connu, le changement de fonction inconnue, s'il s'impose moins, a l'avantage de faire porter la fonction arbitraire h sur une variable et non plus sur la fonction inconnue.

([2]) Séance du 10 janvier 1935.

([3]) *Comptes rendus*, 169, 1919, p. 228.

coûteuses et d'usage économique. Mais Frémont avait surtout en vue le *sondage* des pièces métalliques, dans les régions hétérogènes décelées par l'essai de corrosion, et la mesure des résistances locales des pièces soudées ou partiellement écrouies.

La micromachine récemment construite au laboratoire des usines d'Imphy fournit une solution nouvelle et précise des mêmes problèmes. Elle permet d'essayer à la traction, au cisaillement et à la flexion des éprouvettes dont le diamètre est de 1 à $1^{mm},5$ seulement. En outre, les diagrammes « effort-déformation » sont enregistrés photographiquement : ce résultat est obtenu par un dispositif optique en tous points semblable à celui du dilatomètre différentiel.

Pour faire saisir le fonctionnement de la machine, il suffira de décrire le mécanisme utilisé pour l'essai au cisaillement, essai d'un intérêt particulier pour l'exploration en détail des pièces hétérogènes. Le barreau $b_1 b_2$ est serré dans un étau E à mâchoires hémicylindriques en acier très dur. Cet étau est fixé à l'extrémité supérieure d'une lame-ressort R en élinvar, encastrée à sa base. Le couteau d'acier trempé C est porté par un levier L, articulé autour d'un axe parallèle à $b_1 b_2$. Quand le levier, entraîné par un moteur électrique, se meut dans le sens de la flèche, l'arête du couteau se déplace dans un plan distant de $0^{mm},01$ du flanc de l'étau, et le barreau se trouve cisaillé.

Le déplacement du ressort et celui du couteau sont transmis par des coulisseaux d'acier a_1, a_2 aux pointes p_1, p_2 d'un trépied optique, dont la troisième pointe p_3 reste immobile; l'angle $\widehat{p_1 p_2 p_3}$ est égal à un droit. Il est aisé de voir que la courbe enregistrée sur une plaque photographique immobile, par le jeu du trépied optique, a pour coordonnées : 1° l'effort F, repéré par la flexion du ressort transmise à la pointe p_2; 2° l'enfoncement c du couteau égal à la différence des déplacements communiqués aux pointes p_1 et p_2.

On peut enregistrer jusqu'à 10 courbes sur une même plaque : un dispositif sert à décaler leurs points de départ de manière à éviter tout enchevêtrement.

Grâce à la simplicité du mécanisme et du système optique, à une construction soignée, les courbes enregistrées (voir figure 2 à gauche) sont nettes, déliées, et susceptibles de pointés précis : il est aisé, en particulier, d'évaluer la limite élastique correspondant à un petit allongement convenu, 2.10^{-3} le plus souvent.

Le diagramme de la figure 2 (à droite), donné à titre d'exemple, montre le résultat d'une exploration mécanique suivant l'épaisseur d'un tube épais, en acier à 0,25 pour 100 C et 2 pour 100 Ni, trempé, revenu, puis soumis

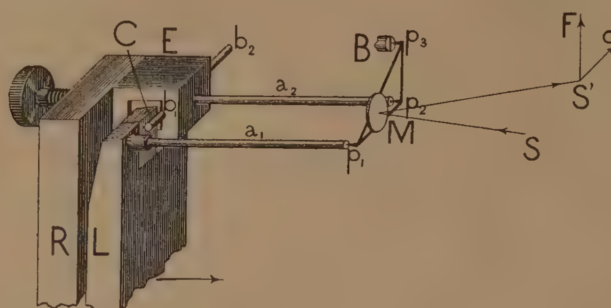


Fig. 1.

à une forte pression intérieure. Le barreau de $1^{mm},5$ de diamètre et de 40^{mm} de longueur a été cisaillé en 23 tronçons, et l'on a déterminé pour chaque

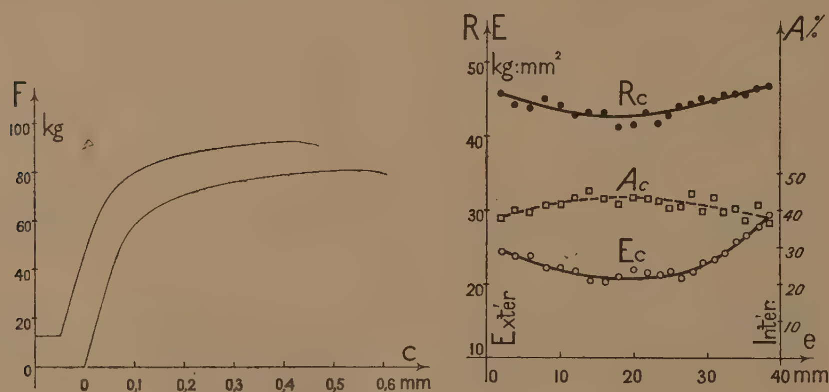


Fig. 2.

section la limite élastique E_c, la résistance R_c et l'allongement au cisaillement A_c. L'allure des courbes met en évidence le double effet de la pénétration de trempe et de l'autofrettage.

Comme application de la machine, on peut envisager :

1° L'étude précise des lois expérimentales de la déformation des matériaux, grâce à la netteté des courbes enregistrées.

2° L'étude complète d'un alliage moyennant une faible dépense de métal, considération importante pour les usines qui élaborent des alliages spéciaux aux additions coûteuses. Les ténacités mesurées sur éprouvettes de $1^{mm},5$

de diamètre diffèrent peu de celles qu'on obtient avec des machines industrielles.

3° L'étude des anisotropies d'origine cristalline ou créées par les traitements.

4° L'étude des hétérogénéités d'origine chimique, physicochimique ou structurale : ségrégations, modifications superficielles par cémentation, décarburation ou brûlure, pénétration de trempe, autofrettage, etc.; en particulier, la micromachine convient spécialement à l'étude des soudures.

MÉCANIQUE CÉLESTE. — *Sur les effets de la théorie de la relativité.* Note [1] de M. **Georges Maneff**, présentée par M. Ernest Esclangon.

Nous avons pu donner une forme particulière et plus parfaite aux équations de la théorie de la relativité, en déterminant d'une manière plus exacte la constante de la formule (4) [2]. Dans la présente Note, nous considérerons la déviation des rayons lumineux en nous servant du principe de la moindre action (avec λ).

Nous étudions la déviation des rayons lumineux passant au bord du Soleil, en introduisant le temps corrigé dans la formule (4) de la Note ci-dessus indiquée, obtenant ainsi l'équation différentielle ($A = 0$ pour la géodésique nulle)

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = \frac{9c^2}{8b^2} - \rho^2 + \alpha\rho^3. \tag{1}$$

En outre, nous considérerons aussi l'élément linéaire avec λ, lequel apparaît toujours lorsqu'on applique rigoureusement le principe de l'action stationnaire. Nous avons :

$$\lambda = \frac{4\pi k\rho}{c^2} \quad \text{et} \quad v^2 = c^2\left(1 - \frac{\alpha}{r} - \frac{\lambda}{3}r^2\right). \tag{2}$$

Dans

$$v^2 = c^2\left(1 - \frac{2kM}{c^2 r} - \frac{4\pi k\rho r^2}{3c^2}\right) = c^2\left(1 - \frac{3kM}{c^2 r}\right), \tag{3}$$

nous déterminons le facteur v^2 au dt^2 en rapport avec (2).

Alors, au lieu de la formule (14) de la Note précédente, on obtient

$$\frac{9}{8}c^2 - A = \underset{\to 0}{E}, \quad \alpha_2 A = 3kM \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \frac{8}{3}\frac{kM}{c^2}, \tag{4}$$

---

[1] Séance du 2 janvier 1935.

[2] G. Maneff, *Comptes rendus*, 199, 1934, p. 1376.

qui conduisent à la déviation

$$(5)\qquad \psi = \frac{16}{3}\frac{kM}{c^2 d} \qquad \text{et, pour le Soleil,} \qquad \psi_s = \frac{4}{3}\,1'',74 = 2'',32.$$

E. Freundlich ([1]), d'après ses observations personnelles, et après examen de celles de 1919 et 1921 appartenant à d'autres observateurs, a trouvé que la déviation des rayons lumineux, passant tangentiellement au bord du Soleil, donne 2″,24 ou 2″,2 (± 0,1), et non pas 1″,74 que l'on obtient par les équations de la théorie de la relativité.

Notre résultat (5) est donc très voisin de celui trouvé par Freundlich.

Considérons maintenant le déplacement des raies spectrales. La correction, déduite de la formule (4) de la Note précédente, n'a point d'importance ici, parce qu'elle se rapporte à la surface du Soleil, et non à son centre. Cependant on constate, en rapport avec (2), l'influence de λ,

$$(6)\qquad \sqrt{-g_{44}} = \frac{v}{c} = 1 + \frac{3\psi}{2c^2}.$$

Mais la partie supplémentaire a le caractère d'effet de Doppler-Fizeau.

Dans un second point de vue, on peut considérer les effets vis-à-vis de la masse, et cela au moyen des équations de la théorie classique. Partons de notre équation différentielle ([2])

$$(7)\qquad \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = \frac{C}{b^2} + \frac{2kM - \beta C}{b^2}\rho - \left(1 + \frac{2\beta kM}{b^2}\right)\rho^2 + 2\beta\rho^3,$$

pour laquelle M. Tzénoff ([3]) a établi qu'elle peut servir à obtenir les deux effets de la théorie de la relativité. Cette équation est formée avec la masse

$$(8)\qquad m_0 = \frac{E}{c^2}.$$

Or, si l'on part non pas de la masse (8), mais de la suivante

$$(9)\qquad m'_0 = \frac{4E}{3c^2},$$

qui comporte l'influence du champ sur la masse et qui est du reste plus

---

([1]) E. Freundlich, *Zeits. f. Astrophys.*, 3, 1931, p. 171.

([2]) G. Maneff, *Annuaire de l'Univ. de Sofia*, fasc. 1, 1931-1932, p. 355.

([3]) Iv. Tzénoff, *L'Enseignement mathématique*, 31, 1932, p. 77.

commode pour la correction, on obtient

$$m' = m'_0 \, e^{\frac{4kM}{3c^2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}; \tag{10}$$

l'équation différentielle modifiée (7) conduit alors à

$$\varepsilon_1 = \frac{16\pi k M}{3c^2 a(1-e^2)}, \tag{11}$$

qui donne pour Mercure un déplacement du périhélie égale à 38″,2, résultat correspondant à la solution B de Grossmann.

Les formules (7) et (8) donnent directement 29″ correspondant à la solution A du même auteur.

Enfin, considérons la déviation des rayons lumineux, en partant de (7) et posant $v = c$, ou bien de

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = \frac{c^2}{b^2} - \rho^2 + 2\beta\rho^3. \tag{12}$$

Dans le premier cas, solution par l'intermédiaire de (8), on obtient 1″,74; dans la solution par l'intermédiaire de (9), on obtient 2″,32.

Ce sont les mêmes résultats que dans le premier cas, identiques aux résultats expérimentaux étudiés par Grossmann et Freundlich. D'après M. Danjon, qui a fait une étude critique analogue des observations, on obtiendrait plutôt 2″,1 (1). Une analyse plus détaillée (2) des membres de la formule (3) donne du reste un résultat possible entre les limites 2″,03 et 2″,32. La dernière valeur 2″,32 est un maximum.

ASTRONOMIE PHYSIQUE. — *Changements rapides dans le spectre de Nova Herculis : bandes d'absorption attribuées au cyanogène.* Note (3) de M. **Jean Dufay** et Mlle **M. Bloch**, présentée par M. Ch. Fabry.

Pour photographier le spectre de Nova Herculis, nous avons monté sur l'équatorial Eichens de l'Observatoire de Lyon un spectrographe à prisme objectif, comprenant un prisme de 60° en flint extradense et un objectif de 38mm d'ouverture. Entre H_γ et H_ζ, la dispersion moyenne est de 48 Å

(1) *Journal de Physique et le Radium*, 7e série, 3, 1932, n° 7, p. 281.

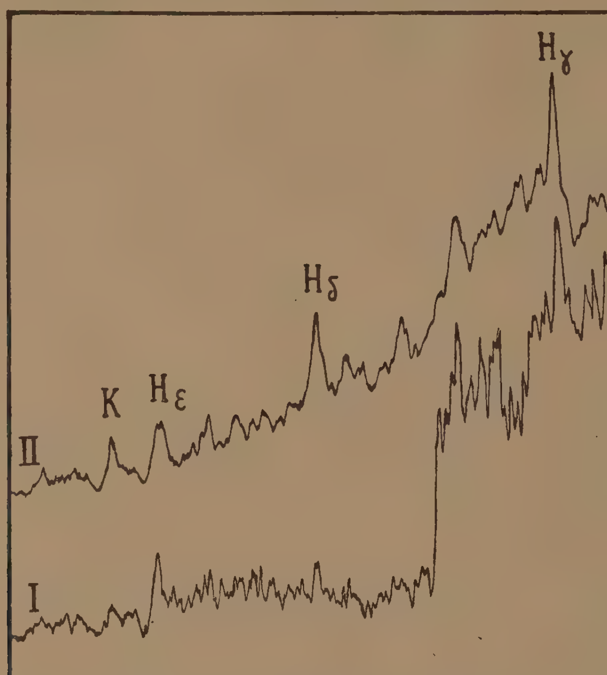
(2) G. Maneff, *Annuaire de l'Univ. de Sofia*, fasc. 1, 1933-1934, p. 321.

(3) Séance du 7 janvier 1935.

par millimètre. Nous utilisons les plaques orthochromatiques Lumière Superopta et les plaques panchromatiques Ilford hypersensitives.

Une dizaine de clichés au total ont été obtenus les 25, 27, 29, 30 décembre 1934, 2 et 4 janvier 1935. Ils montrent des changements rapides dans le spectre de la Nova.

Le nombre des raies d'émission a beaucoup augmenté, surtout le 25 et



Diagrammes d'enregistrement au microphotomètre : I, 25 décembre; II, 27 décembre.

le 29 décembre; elles ont pris une importance plus grande par rapport au fond continu. Nous reviendrons prochainement sur l'attribution de ces raies d'émission et sur celle des raies d'absorption.

Les raies sombres de l'hydrogène sont accompagnées, au moins de H_α à H_ζ, par les raies d'émission correspondantes, du côté rouge. Le déplacement des raies sombres par rapport aux raies brillantes a peu varié et, pour H_γ et H_δ par exemple, reste voisin de $17.10^{-4}\lambda$. Si on l'interprète comme un effet Doppler-Fizeau, il correspond à une vitesse radiale d'approche de 510^{km} par seconde.

Le changement le plus apparent s'est produit entre le 25 et le 27 décembre. Le 25 décembre, le spectre, intense depuis H_3, montrait un affaiblissement considérable et brusque, ayant le caractère d'une disconti-

nuité, vers 4210 Å, après une raie d'émission. Cet affaiblissement n'était plus nettement visible le 27 décembre et il avait entièrement disparu le 29. Nous pensons pouvoir l'attribuer à la large bande d'absorption du cyanogène, dont la tête est à 4216 Å. La figure ci-contre reproduit une partie des diagrammes d'enregistrement au microphotomètre d'un cliché du 25 et d'un cliché du 27 décembre, dans cette région.

Les spectres du 25 décembre montrent d'autre part une seconde discontinuité, immédiatement après H_ζ, du côté violet. Elle correspond bien à la bande 3883, la plus intense du groupe violet du cyanogène. Le 27, on distinguait seulement, dans cette région, un affaiblissement qui a complètement disparu le 29 et le 30. Les spectres du 30 décembre notamment s'étendent jusque vers 3650 Å, sans trace de bande d'absorption.

M. Lindblad a observé indépendamment la présence de ces deux bandes d'absorption le 26 décembre et les a attribuées aussi au cyanogène [1]. Leur disparition presque totale s'est donc produite entre le 26 et le 27 décembre. Il serait intéressant de rechercher si leur présence peut être mise en évidence sur des spectres antérieurs au 25.

L'apparition des bandes attribuées au cyanogène n'a pas été signalée, à notre connaissance, dans le spectre des précédentes novæ.

ASTRONOMIE PHYSIQUE. — *Le spectre de la couronne solaire en* 1934. Note de M. **Bernard Lyot**, présentée par M. Ernest Esclangon.

Des images de la couronne obtenues en juillet et en août 1931, au Pic du Midi, avec un spectro-enregistreur, ont montré, qu'à cette époque, la raie verte était très faible ou invisible aux latitudes élevées et qu'elle présentait au contraire des maxima intenses près de l'équateur, pour des latitudes toujours inférieures à 30°. La raie rouge possédait une répartition beaucoup plus uniforme.

Pendant cette première série d'observations, l'activité solaire était en décroissance. Au printemps 1934, elle augmentait après un long minimum.

---

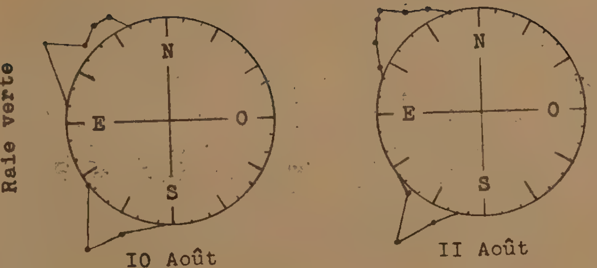
[1] *Circulaire* n° 507 *du Bureau central des télégrammes astronomiques*, Observatoire de Copenhague, 29 décembre 1934. Cette circulaire nous est parvenue le 1er janvier. Dès le 29 décembre nous avions communiqué à la Société astronomique de France une note concernant les bandes observées à Lyon et leur attribution probable au cyanogène. Le 31, nous avons transmis le même renseignement à Copenhague.

INTENSITES DE LA RAIE VERTE ET DE LA RAIE ROUGE OBSERVEES EN 1934,

A 55" DU BORD SOLAIRE,

DANS LES DIVERS ANGLES DE POSITION

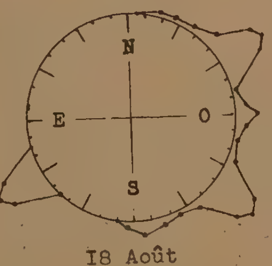
Raie verte



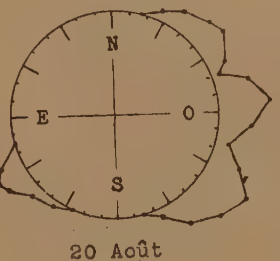
Raie verte



I6 Août



I8 Août



20 Août

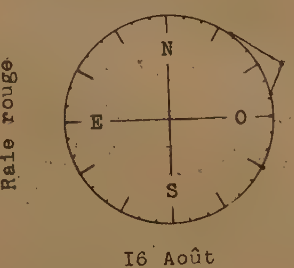


23 Août

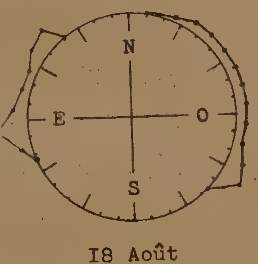


24 Août

Raie rouge



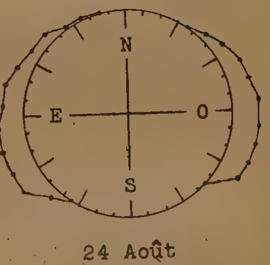
I6 Août



I8 Août



23 Août



24 Août

J'ai séjourné à l'Institut de Recherches du Jungfraujoch, du 6 au 27 août, afin d'étudier l'influence du nouveau cycle sur la répartition de la lumière des raies verte et rouge. Pendant cette période, les nuages ont été très fréquents, de légers voiles de cirrus empêchèrent souvent d'observer la couronne. Il y a eu cependant 3 journées entières et 4 demi-journées de ciel parfaitement pur grâce à l'altitude élevée de la station (3450^m).

Je me suis servi d'un coronographe léger, de 1^m de long, dont la lentille principale mesurait 5^{cm} de diamètre et 48^{cm} de distance focale. Cet instrument, installé sur la terrasse supérieure, était porté par une monture équatoriale petite, mais très stable; il formait l'image des alentours du Soleil sur la fente d'un bon spectroscope à vision directe qui séparait, dans le vert, 0,7 A.

L'ensemble des deux appareils pouvait tourner autour de l'axe du coronographe. Une vis micrométrique permettait de faire varier la distance de la fente au bord du Soleil et de mesurer cette distance. Un cercle placé sur le coronographe donnait l'angle de position du point du bord solaire le plus voisin de la fente.

Un observateur dont les yeux étaient protégés très soigneusement contre la lumière extérieure déterminait les points du bord solaire où les raies brillantes apparaissaient et disparaissaient, estimait leurs intensités et déterminait les positions de leurs maxima et de leurs minima, il mesurait également la distance de la fente au bord solaire pour laquelle la raie cessait d'être visible. Un deuxième observateur assurait le centrage du Soleil derrière le disque du coronographe; il effectuait les manœuvres et il lisait les cercles.

Les graphiques de la figure résument les observations, ils donnent, avec une échelle arbitraire, les intensités de la raie verte et de la raie rouge tout autour du Soleil, à une distance du bord solaire égale à 55″ environ. Les hauteurs des jets ont été mesurées au cours des deux dernières observations et sont indiquées par les chiffres inscrits à l'intérieur des graphiques.

La raie verte possédait, en 1934, une répartition très différente de celle de 1931. Ses jets, plus nombreux, avaient des latitudes beaucoup plus élevées tandis qu'à l'équateur, elle était souvent invisible.

D'autre part, du 10 au 24 août, le Soleil a tourné de 185°. En comparant les graphiques du 10 et du 11 à celui du 24, nous voyons que les principaux jets de la couronne ont accompagné le Soleil dans sa rotation.

Les graphiques de la raie rouge montrent que cette radiation se comporte très différemment de la raie verte. Exception faite des deux jets observés,

l'un au Nord-Ouest, le 16 août, et l'autre au Sud-Ouest, le 18 août, ses maxima d'intensité, larges et flous, ont occupé des points où la raie verte était invisible.

La comparaison de ces documents aux images données par le spectrohéliographe permettra de préciser quelles sont les régions actives du Soleil qui donnent naissance aux jets de la raie verte et peut-être de déterminer le mécanisme différent par lequel la raie rouge s'illumine.

PIÉZOÉLECTRICITÉ. — *Sur l'absence d'hystérésis des phénomènes piézoélectriques.* Note [1] de M. **Paul Bernard**, présentée par M. Ch. Fabry.

On a établi précédemment [2], comme résultats d'expériences effectuées à l'aide d'un dispositif d'enregistrement et de mesure de pression par manomètre à quartz et oscillographe Dufour, la *réversibilité* des phénomènes piézoélectriques.

Le présent travail traite de l'absence d'hystérésis de ces phénomènes.

On a étudié par la méthode expérimentale et en utilisant le dispositif piézoélectrique des précédents essais, l'influence de la vitesse de développement des pressions appliquées au quartz, sur les quantités d'électricité dégagées. Les vitesses extrêmes réalisées sont dans le rapport de 1 à 10000 et les durées de développement des charges qui correspondent à ces vitesses sont respectivement de l'ordre de 1/10000e de seconde seulement ou supérieures à la seconde.

On a satisfait à ces conditions d'essais en utilisant pour le développement des pressions un manomètre à huile.

L'étude comprend deux types d'essais :

I. Enregistrements complets et séparés : *a*, d'une courbe de développement très rapide (durée de l'ordre de 1/10000e de seconde) d'une compression de valeur connue; *b*, d'une courbe de développement d'une décompression lente (durée supérieure à la seconde) de valeur connue et égale à celle de la compression.

Les résultats sont les suivants :

---

(1) Séance du 26 décembre 1934.

(2) P. Bernard, *Comptes rendus*, 199, 1934, p. 1388.

Pression du fluide dans le dynamomètre (kg/cm²)	503	1004	1462	1974	2406
Pression sur le quartz (kg/cm²)	56	112	163	220	268
Différence des pressions du fluide enregistrées (compression rapide, décompression lente) (kg/cm²)	+13	−4	+1	+17	+5

Les valeurs des pressions du fluide enregistrées concordent à quelques kilogrammes près, c'est-à-dire à l'ordre de grandeur de la dispersion des mesures directes expérimentales des pressions de référence (pression du fluide dans le dynamomètre).

II. Enregistrement d'une courbe de développement de pression comprenant une compression très rapide (durée de l'ordre de 1/10000ᵉ de seconde) suivie d'une décompression lente (durée supérieure à la seconde) de valeur égale.

Compression et décompression se suivent à intervalle de temps assez réduit pour que les pertes de charges électriques développées dans le quartz n'aient qu'une valeur négligeable.

Les oscillogrammes montrent que la courbe de développement des pressions se termine d'une façon exacte et certaine en fin de décompression sur l'axe zéro initial des pressions nulles et par suite qu'il y a compensation des actions électriques développées par les variations de pression rapides à la compression, lentes à la décompression.

Ces essais ont été effectués dans les conditions suivantes :

Pressions dynamométiques	503	1196	2011	2647	3504
Pressions sur le quartz	56	133	224	294	390

A ces résultats sont à joindre ceux présentés précédemment au titre de l'étude de la réversibilité des phénomènes piézoélectriques, et provenant d'essais effectués aux mêmes vitesses de compression, et de décompression.

Dans tous les cas les quantités d'électricité dégagées par le quartz pour d'égales variations de pression sont équivalentes.

Cet ensemble de résultats ne fait ainsi apparaître dans aucun cas une influence de la vitesse sur les quantités d'électricité dégagées et dans ces conditions établit pour ces pressions sur le quartz atteignant jusqu'à 390 kg/cm² l'absence d'hystérésis des phénomènes piézoélectriques.

ÉLECTROTECHNIQUE. — *Sur les lieux géométriques du point neutre d'un système triphasé.* Note (¹) de M. **L. G. Stokvis**, transmise par M. André Blondel.

Les caractéristiques du court-circuit total ou partiel sont : déformation du triangle équilatéral des tensions composées, déséquilibre des vecteurs représentant les admittances, et déplacement du neutre. Il est donc très important de pouvoir suivre le déplacement du neutre en fonction de la déformation du triangle des tensions et du déséquilibre des admittances correspondantes. La méthode classique a été indiquée par Kennelly en 1899. Elle consiste à assimiler les admittances à des forces appliquées aux sommets du triangle des tensions composées. Le calcul basé sur cette théorie devient vite inextricable; les méthodes de la graphique statique qu'on y applique ne permettent pas de tirer des conclusions. Nous pouvons suivre facilement les déplacements du neutre par la méthode suivante, purement géométrique :

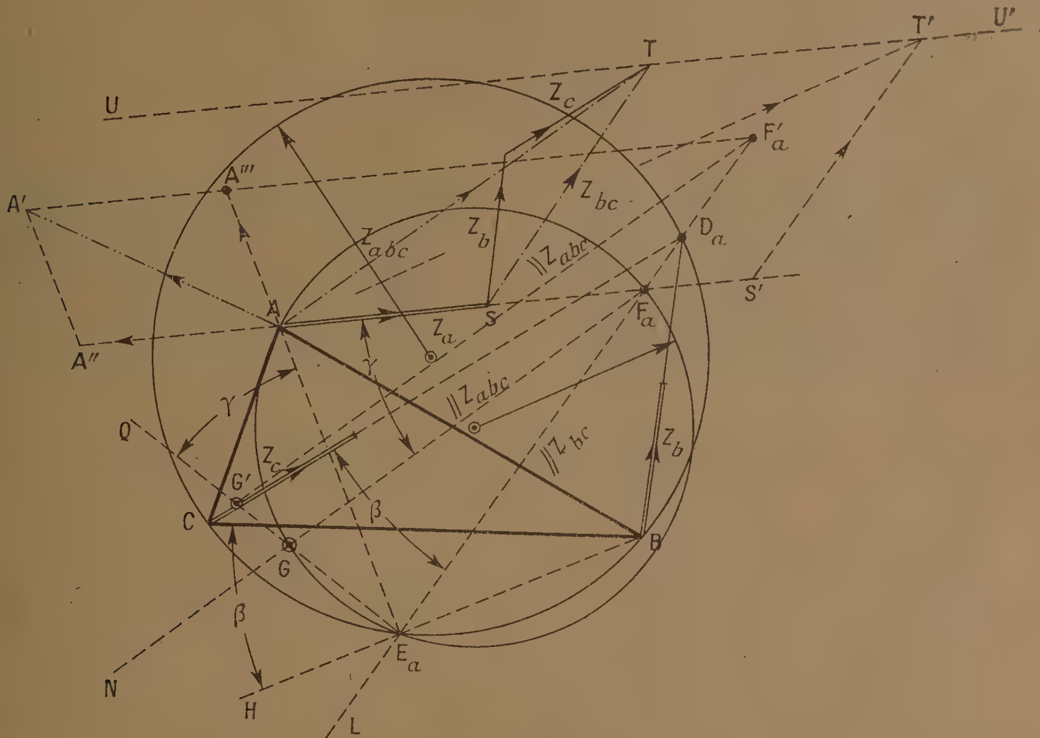
Soient ABC le triangle des tensions composées et Z_a, Z_b, Z_c les admittances correspondantes, qui seront considérées comme vecteurs représentant des forces.

Soit D_a le point d'intersection de Z_b et Z_c. Menons par D_a une droite D_aL, parallèle à Z_{bc}, résultante de Z_b et Z_c. Menons une droite BH par B de telle façon que $\sphericalangle CD_aL = \sphericalangle CBH = \beta$. Soit E_a l'intersection de D_aL et BH. Alors, suivant un théorème de la géométrie, les points B, C, D_a et E_a se trouveront sur un cercle. Si nous déplaçons D_a sur ce cercle, les vecteurs Z_b et Z_c sont décalés du même angle, ainsi que leur résultante qui passe toujours par le point E_a. Pour chaque rotation simultanée, E_a reste donc fixe.

Soit maintenant F_a le point d'intersection de Z_a et D_aE_a. Menons par F_a une parallèle F_aN à Z_{abc}. Menons une droite E_aQ par E_a, de façon que $\sphericalangle AE_aQ = \sphericalangle AF_aN = \gamma$. Soit G l'intersection de F_aN et de E_aQ, alors E_a, G, A et F_a se trouvent sur un cercle. Avec le même raisonnement qu'auparavant, l'on trouve que pour chaque position de F_a sur ce cercle la résultante Z_{abc} de Z_a, Z_b et Z_c passe par le point G, qui est donc le point neutre.

(¹) Séance du 26 décembre 1934.

Si l'extrémité S du vecteur Z_a se déplace dans la direction de Z_a (les vecteurs Z_b et Z_c restant constants) l'extrémité T de Z_{abc} se déplace sur une droite $UU' \parallel Z_a$. Les directions de Z_a, Z_b et Z_c restant constantes, les points A, F_a et E_a resteront fixes et le neutre se déplacera sur le cercle mentionné ci-dessus. Pour $Z_a = 0$ (rupture de phase) le point G se trou-



vera en E_a et, passant sur la circonférence du cercle par G pour la valeur de $Z_a = Z_a$, atteindra le point A pour la valeur de $Z = \infty$ (court-circuit). Remarquons que la position de G (du neutre) ne dépend que de la position et longueur relatives des vecteurs Z_a, Z_b et Z_c, mais non de leurs valeurs absolues. Le neutre ne se déplace donc pas si l'on multiplie ces vecteurs par un autre vecteur $(Z_1 + jZ_2)$. On peut les tourner et agrandir simultanément.

Quand, sous l'influence de la rupture de phase, du court-circuit franc ou limité, le triangle des tensions composées se déforme l'on peut déduire du diagramme précédent le déplacement du neutre. Soit AA′ ce déplacement. Décomposons ce vecteur en deux composantes : AA″ (dans la direction de Z_a) et AA‴ (dans la direction de E_aA). Le déplacement dans la direction

de AA″ n'a aucune influence sur le déplacement du neutre, de sorte que ce déplacement n'est une fonction que de AA‴. Menons par AA‴ une parallèle à Z_a, qui coupe la droite E_aD_a en F'_a. Menons par F'_a une parallèle à Z_{abc}, qui coupe la droite E_aQ en G′. Le point G′ sera alors le nouveau neutre, qui s'est déplacé de G à G′. Le lieu géométrique du point neutre, si l'un des sommets du triangle des tensions composées se déplace, les admittances restant les mêmes ou multipliées par le même vecteur, est une droite.

Le lieu géométrique du point neutre pour un triangle des tensions composées données et dont la valeur absolue d'une des admittances est variable est un cercle.

Quand la position du neutre est connue, les courants de phase peuvent être immédiatement calculés, ceux-ci étant le produit vectoriel de la tension et de l'admittance en question.

ÉLECTROCHIMIE. — *L'adsorption de certains colloïdes par les surfaces métalliques, et son influence sur la structure des dépôts électrolytiques.* Note [1] de M. **Pierre Jacquet**, présentée par M. G. Urbain.

J'ai montré que certains colloïdes hydrophiles (protéines et peptones) sont retenus énergiquement par les surfaces métalliques et diminuent l'adhérence des dépôts électrolytiques effectués sur ces surfaces [2]. J'avais signalé cependant qu'il est impossible de mettre en évidence une modification quelconque de la structure des couches de cuivre déposé dans ces conditions. Ces expériences avaient été faites sur un support en cuivre parfaitement poli, mais si l'on utilise un support mat obtenu en attaquant la lame métallique par de l'acide nitrique dilué, on constate une diminution considérable de la taille des cristaux ; à titre d'exemple les figures 1 et 2 représentent au grossissement de 1000 diamètres la structure du dépôt sur une lame de cuivre laminé et décapé et celle d'un dépôt obtenu sur un support identique mais immergé pendant 30 secondes dans une solution aqueuse de peptone de caséine à un gramme par litre et ensuite abondamment lavé. Cet effet (diminution de la taille des cristaux) explique pourquoi les colloïdes adsorbés sur une lame de cuivre poli ne produisent aucune modification de la structure des dépôts. En effet dans le cas d'un support

---

(1) Séance du 7 janvier 1935.

(2) *Comptes rendus*, 196, 1933, p. 921.

poli la cristallisation des premières couches de cuivre est normalement très fine.

Ces résultats m'ont incité à examiner l'effet des couches d'adsorption sur des supports en cuivre de nature physique différente : cuivre électrolytique, cuivre fondu et laminé, cuivre fondu, laminé et recuit (dont la structure est formée de très gros cristaux); ces supports sont soit polis aussi parfaitement que possible, soit décapés dans l'acide nitrique. Dans tous les cas les dépôts sur cuivre poli présentent une structure identique, très fine au voisinage immédiat du support, plus grossière ensuite par suite

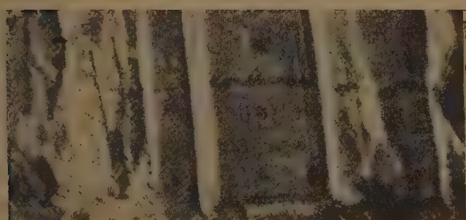


Fig. 1.



Fig. 2.

de la croissance de chaque cristal initial. Avec les cathodes décapées la continuité cristalline du métal de base dans le dépôt est empêchée par la couche de colloïde sauf dans le cas où le support est constitué de cuivre électrolytique. Ce dernier résultat est d'ailleurs confirmé par l'expérience suivante : on dépose une certaine épaisseur de cuivre sur une cathode laminée possédant une couche d'adsorption de sérum-albumine ou de peptone, puis on effectue de nouveau une immersion dans la solution colloïdale et l'on continue l'électrolyse; l'examen métallographique montre que chaque cristal se continue au delà de la deuxième couche d'adsorption sans aucune modification de forme ou de dimension. Si l'on réalise ainsi plusieurs couches d'adsorption suivies d'électrolyse, tous les cristaux se poursuivent régulièrement, mais ils ne grossissent plus. Ceci est surtout très net lorsqu'on opère sur une lame de cuivre poli : les cristaux restent toujours aussi fins qu'au voisinage immédiat du support tandis qu'en l'absence de colloïde ils grossissent rapidement.

Seules les protéines (gélatine, sérum-albumine, caséinate de soude) et les peptones produisent ces modifications de structure, les gommes arabique et adragante n'ont aucun effet; j'ai d'ailleurs montré précédemment que les essais d'adhérence des dépôts de cuivre permettent d'affirmer que dans les conditions expérimentales utilisées ces gommes ne s'adsorbent pas sur les surfaces métalliques.

MAGNÉTISME. — *Propriétés magnétiques des lames minces de nickel.* Note de M. **André Aron**, transmise par M. Pierre Weiss.

J'appelle lames minces les dépôts de nickel, habituellement transparents, effectués sur verre, quartz ou métal, par pulvérisation cathodique, sublimation dans le vide, réaction chimique ou électrolyse. Leur épaisseur, très faible, est assez voisine des dimensions ultimes de la matière pour permettre d'espérer quelque amélioration de nos connaissances relatives à la structure atomique des corps solides. Mais les recherches sont rendues extrêmement délicates par la petitesse des effets à mesurer, les modifications de texture cristalline ainsi que l'apparition de structures exceptionnelles.

Ayant obtenu des dépôts de nickel *non ferromagnétiques* par pulvérisation cathodique dans l'argon pur, j'ai réussi à y faire apparaître le ferromagnétisme par une élévation de température de quelques centaines de degrés (¹) même dans l'air à la pression atmosphérique. Au contraire, deux lames préparées par sublimation dans le vide se montrèrent immédiatement ferromagnétiques et, abandonnées à la température du laboratoire, présentèrent une augmentation du simple au double de l'intensité d'aimantation après un repos de plusieurs jours (²). Je m'efforce actuellement de préciser l'évolution thermique de dépôts de nickel réalisés par pulvérisation cathodique et d'en déterminer principalement le point de Curie, par la méthode de torsion à diverses températures. Les résultats les plus caractéristiques sont résumés dans les graphiques ci-contre où sont portées, en ordonnées, les déviations en millimètres à 1^m dans un champ d'intensité H gauss.

Les coefficients d'intensité I/I_0 ont été mesurés au spectrophotomètre d'Arsonval (I_0 étant l'intensité de la lumière blanche pénétrant directement dans l'appareil, I celle de la même lumière ayant traversé préalablement la lame), antérieurement à tout traitement thermique. Les valeurs obtenues montrent que ces lames sont très transparentes (sensiblement neutres) et, par suite, de très faible épaisseur; la transparence augmente fortement, du reste, après le traitement thermique :

1° lame préparée dans l'hydrogène durant 2 heures, $H = 1060^g$, $I = 0,33\,I_0$;

2° même préparation, même champ, $I = 0,5\,I_0$;

3° dans l'azote, durant 65 minutes, $H = 1030^g$, $I = 0,35\,I_0$.

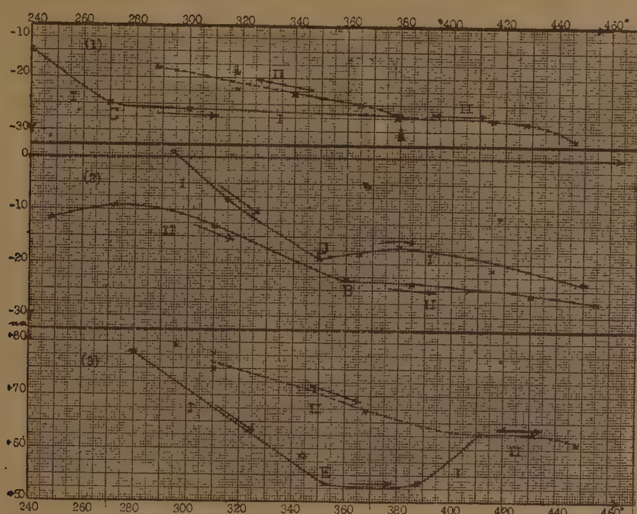
Ces graphiques indiquent nettement l'existence de plusieurs phénomènes

---

(¹) Ingersoll, *Phys. Rev.*, 34, 1929, p. 972.

(²) Fait seulement entrevu par Sörensen, *Phy. Rev.*, 24, 1924, p. 658, et Edwards, *ibid.*, 29, 1927, p. 321.

dont certains sont irréversibles (portion I des trois courbes : en traits pleins), d'autres réversibles (portion II des courbes 1 et 3 : en traits interrompus). Le premier chauffage que subit la lame produit une évolution toujours irréversible, caractérisée par l'apparition du ferromagnétisme et par l'existence d'au moins un point anguleux (C, D, E). Les températures



correspondantes (270°, 350°, 352°) semblent en relation avec la durée de l'évolution thermique et ne pas constituer, par conséquent, des valeurs caractéristiques. Le phénoméne réversible n'apparaît qu'en second lieu, après une durée de chauffage suffisante, et non pas à une température déterminée. Seule l'oxydation semble pouvoir le faire disparaître. Le point A de la courbe 1 est vraisemblablement le point de Curie, Il est donc de 20° plus élevé que celui du nickel ordinaire (ce dernier a été mesuré exactement dans les mêmes conditions sur un fil de nickel pur et trouvé de 20° inférieur (¹). Le ferromagnétisme subsiste cependant aux températures plus élevées. Il y aurait donc apparition d'une autre variété ferromagnétique à point de Curie plus élevé, non encore déterminé. La courbe II du graphique 2 semble comporter le point de Curie normal égal à 360° (point B), mais l'oxydation a empêché toute vérification ultérieure. Le graphique 3 manifeste clairement (comme 1) l'existence de ferromagnétisme

---

(¹) Fait déjà observé sur les lames obtenues par électrolyse (St. Procopiu, *Comptes rendus*, **198**, 1934, p. 1983).

jusqu'à la température de 450° sans qu'aucun point de Curie ait pu être mis en évidence.

Ces recherches préliminaires vont être poursuivies dans le but de préciser les indications obtenues jusqu'à présent en opérant éventuellement dans un autre gaz que l'air et même dans le vide.

SPECTROSCOPIE. — *La persistance des raies d'intercombinaison.* Note de M. **Adolfo T. Williams**, présentée par M. Ch. Fabry.

Nous occupant (1) de la règle de Croze (2), selon laquelle les raies ultimes ne sont pas des raies d'intercombinaison, nous avons attribué la persistance de certaines lignes de la classe susmentionnée, des atomes du sous-groupe du Hg, à l'augmentation de la différence ${}^3P^0_0 - {}^1P^0_1$. Déjardin (3) confirma cette règle, en comparant la persistance des raies ${}^1S_0 - {}^3P^0_1$ du Mg (I) et du Si (III). Cette conclusion doit être modifiée d'après les considérations suivantes.

Le manque de persistance des lignes d'intercombinaison est dû, d'après J. Pauling et S. Goudsmit (4), à ce que l'interaction entre **l** et **s** est petite en comparaison avec les autres interactions et à ce que le couplage **ls** a peu d'influence dans le mouvement orbital des électrons et que, pour ce motif, *s* ne varie pas pendant la transition; en échange lorsque la séparation entre les termes des triplets n'est pas petite par comparaison avec la séparation entre les triplets et les singulets de la *même configuration*, *s* varie et il peut y avoir des raies d'intercombinaison persistantes. Pour confirmer cette théorie les auteurs donnent pour exemple les éléments du Be au Hg, dans lesquels à mesure que la distance ${}^3P^0_0 - {}^1P^0_1$ diminue, la séparation des triplets ${}^3P^0_2 - {}^3P^0_0$ augmente; ceci est exact si l'on compare, non pas la croissance d'une grandeur et la décroissance de l'autre, mais bien leur rapport, c'est-à-dire que ${}^3P^0_0 - {}^1P^0_1 / {}^3P^0_2 - {}^3P^0_0$ décroît régulièrement, de la façon suivante : 6861,0 (Be); 216,0 (Mg); 53,7 (Ca); 24,9 (Zn); 12,7 (Sr); **7,9** (Cd); 4,6 Ba et **2,5** (Hg) (5).

(1) *Comptes rendus*, 187, 1928, p. 762, et *Contr. est. cien. fs. mat.*, La Plata, 4, 1928, p. 371.

(2) *Comptes rendus*, 177, 1923, p. 1285.

(3) *Journ. Phys. Rad.*, 6e série, 9, 1928, p. 139.

(4) *The Structure of Line Spectra*, p. 136.

(5) Les chiffres en caractères gras correspondent aux rapports pour lesquels il existe des raies ultimes.

Un fait analogue s'observe aussi dans le sous-groupe du C, où il existe des lignes ultimes d'intercombinaison. Le rapport des termes originaires de la configuration s^2p^2 décroît régulièrement : $({}^3P_0 - {}^1D_2)/({}^3P_0 - {}^3P_2) = 24{,}7$ (C); 28,2 (Si); 5,0 (Ge); 2,9 (Sn) et **2,0** (Pb). Aussi le rapport des termes provenant de la configuration s^2ps diminue régulièrement :

$$\frac{{}^3P_0^0 - {}^1P_1^0}{{}^3P_2^0 - {}^3P_0^0} = 27{,}5\ (\mathrm{C});\quad 5{,}0\ (\mathrm{Si});\quad \mathbf{1{,}5}\ (\mathrm{Ge});\quad \mathbf{1{,}2}\ (\mathrm{Sn})\quad \text{et}\quad \mathbf{1{,}1}\ (\mathrm{Pb}).$$

La même observation est applicable aux quadruplets et aux doublets du sous-groupe du N, originaires de la configuration p^2s. On trouve : $({}^4P_1 - {}^2P_2)/({}^4P_1 - {}^4P_3) = 35{,}8$ (N); 22,8 (P); **1,7** (As) et **1,2** (Sb).

Dans le sous-groupe du Sc (II), Y (II) et La (II) il y a de nombreuses raies ultimes d'intercombinaison et la théorie se vérifie d'une manière parfaite pour quatre différentes configurations, comme le montre le tableau suivant :

Configuration.	Rapport.	Sc (II).	Y (II).	La (II).
d^2	$\frac{{}^1D_2 - {}^3F_2}{{}^3F_2 - {}^3F_4} =$	33,4	9,2	**5,1**
ds	$\frac{{}^3D_1 - {}^1D_2}{{}^3D_1 - {}^3D_3} =$	14,2	**4,0**	**1,4**
sp	$\frac{{}^3P_0^0 - {}^1P_1^0}{{}^3P_0^0 - {}^3P_2^0} =$	48,7	17,5	**9,8**
dp	$\frac{{}^3F_2^0 - {}^1F_3^0}{{}^3F_2^0 - {}^3F_4^0} =$	12,3	**5,2**	**2,7**

En résumé, à mesure que la valeur des rapports susmentionnés diminue, l'intensité et la persistance des raies d'intercombinaison augmentent. Il paraît y avoir une valeur critique, puisque les valeurs des rapports pour lesquelles il existe des lignes ultimes sont toutes inférieures à 10,0 et dont 4 sont comprises entre 9,8 et 5,1 et 9 autres entre 4,0 et 1,1. On peut donc prévoir que, si dans un atome il existe des valeurs inférieures à 5,0, on doit trouver des raies ultimes d'intercombinaison. On peut aussi vérifier des conclusions semblables dans d'autres atomes.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Influence de la température sur l'explosion des mélanges d'air et d'hydrocarbures.* Note [1] de MM. **Paul Mondain-Monval** et **Roger Wellard**, transmise par M. H. Le Chatelier.

Nous avons pu montrer [2] que des mélanges gazeux d'air et de vapeurs d'hydrocarbures saturés chauffés à volume constant sont le siège de réactions chimiques à une température moyenne assez basse comprise, selon l'hydrocarbure en jeu et la vitesse d'échauffement, entre 190° et 300°. Il nous a été possible de recueillir et d'identifier parmi les produits de la réaction certaines substances appartenant à la famille des oxyalcoylperoxydes, corps extrêmement instables se décomposant violemment par élévation de température avec dégagement de chaleur et de lumière, parfois même avec inflammation du mélange tonnant. D'autre part, des essais directs effectués sur un moteur à explosion nous ont permis de reconnaître que ces oxyalcoylperoxydes apparaissent dans les gaz de fin de compression, à l'intérieur du cylindre, avant l'inflammation par la bougie lorsque, par suite d'un échauffement accidentel ou provoqué, la température du cylindre atteignait 270°, température précisément à laquelle le moteur commence à cogner [3]. Il n'est donc pas douteux que l'apparition du phénomène du choc et celle de la réaction chimique ne soient en étroite corrélation. Bien plus, il apparaît que l'intensité du choc est liée à la teneur en peroxydes du mélange tonnant comprimé dans le cylindre du moteur, au moment même où ce mélange est enflammé par la bougie.

Les expériences que nous rapportons aujourd'hui permettent d'éclaircir la nature de la relation qui existe entre les deux phénomènes.

Un mélange gazeux tonnant d'air et de vapeur d'hexane ou d'essence commerciale légèrement plus riche que le mélange théorique de combustion totale, est enfermé dans une bombe d'acier, sous une pression initiale de 5^{kg}. On l'échauffe à volume constant et, à une température déterminée t_1, on provoque l'explosion par l'étincelle électrique d'un allumage par batterie. L'inflammation des gaz se manifeste par une violente poussée de pression qui est enregistrée grâce à un dispositif particulier dont nous parlerons un peu plus loin.

---

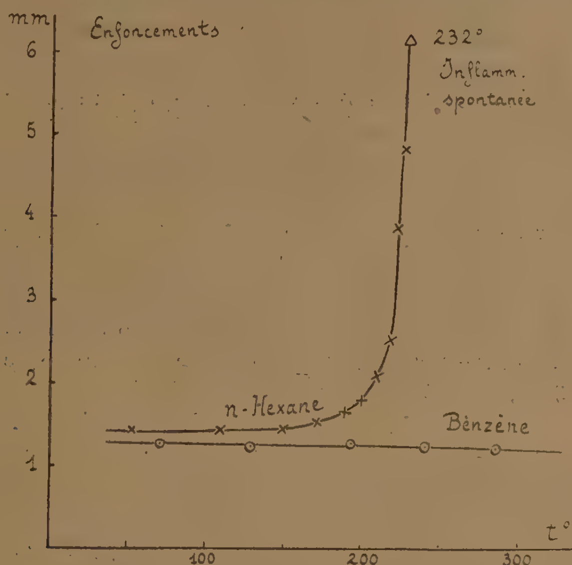
(1) Séance du 2 janvier 1935.

(2) Mondain-Monval et Quanquin, *Comptes rendus*, 191, 1930, p. 299.

(3) Dumanois, Mondain-Monval et Quanquin, *Comptes rendus*, 192, 1931, p. 1158.

En répétant une série d'essais analogues à partir d'un même mélange soumis à la même pression initiale, on peut finalement tracer une courbe des poussées explosives d'un même mélange gazeux enflammé à toute une série de températures s'étendant jusqu'à celle d'inflammation spontanée que l'on ne peut évidemment dépasser.

Les poussées explosives ont été enregistrées de la façon suivante : un petit piston cylindrique (section $1^{cm^2},54$) se déplace dans un cylindre sous l'action des gaz de l'explosion. Ce piston porte une pointe d'acier qui s'enfonce plus ou moins profondé-



ment dans un bloc de plomb. Après l'expérience, on apprécie l'enfoncement au vingtième de millimètre en mesurant au microscope, la profondeur de l'empreinte. En portant en abscisses les températures d'explosion et en ordonnées les enfoncements, on obtient une courbe telle que celle de la figure ci-dessus relative à un mélange air-hexane de composition 6,8 pour 100 en poids.

On voit immédiatement sur cette courbe que, jusqu'à 180°, la poussée explosive produit un enfoncement de la pointe sensiblement indépendant de la température. Au contraire, au delà de 180°, température à laquelle commence à se manifester une réaction chimique entre l'air et les vapeurs d'hydrocarbure, la poussée explosive effectue un travail d'enfoncement de plus en plus considérable, croissant beaucoup plus rapidement que la température et devenant extrêmement important au voisinage du point d'inflammation spontanée, à 232°.

Nous interprétons ces résultats par un changement complet de l'allure de la combustion du mélange gazeux, à partir de 180°. Le piston, non étanche pour des combustions à faible vitesse comme celles que l'on observe à la température ordinaire, n'occasionne dans ces conditions qu'un faible enfoncement de la pointe dans le plomb. Au contraire, il se déplacera d'un seul coup et sans fuite, comme sous la percussion d'un coup de marteau, vers 230° si, à cette température, par suite de la présence de peroxydes dans le mélange gazeux, la combustion de celui-ci et la poussée de pression correspondante

peuvent être considérées comme pratiquement instantanées, leurs vitesses de propagation atteignant en réalité plusieurs milliers de mètres à la seconde. Ces vitesses peuvent être envisagées en toute logique dans un mélange inflammable contenant des alcoylperoxydes, molécules douées d'une grande énergie latente qu'elles libèrent en déterminant la combustion quasi instantanée de la masse qui les entoure. On sait, par ailleurs, que de semblables vitesses de flamme ont pu être observées récemment par voie chronophotographique dans des moteurs en régime de choc.

On remarquera que, même sans chercher à établir le mécanisme intime de la relation entre la teneur en peroxydes du mélange gazeux et la vitesse de propagation de la poussée explosive, le changement d'allure de l'explosion que révèle la courbe ci-dessus suffit à expliquer l'origine des efforts brutaux auxquels sont soumis les divers organes d'un moteur qui cogne par suite d'un excès de compression ou d'un échauffement anormal; l'enfoncement de la pointe dans le plomb pouvant, en effet, être considéré comme une image concrète du travail auquel sont soumis ces divers organes, soit en régime normal, soit en régime de choc.

Si l'on remplace l'hexane ou les essences commerciales par du benzène, les enfoncements demeurent indépendants de la température, l'explosion est toujours relativement molle; phénomène qui est à rapprocher du fait bien connu que le benzène ne donne pas lieu au choc et n'est le siège d'aucune réaction chimique avec l'oxygène de l'air, au-dessous de 360°.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Calcul et représentation graphique des déplacements élémentaires dans les réactions d'équilibres chimiques homogènes. Variations de la température et de la pression.* Note de M. **Pierre Montagne**, présentée par M. Henry Le Chatelier.

Nous avons indiqué (¹) les principaux avantages de l'emploi du diagramme triangulaire pour la représentation des réactions d'équilibres chimiques homogènes d'équation



$$(1)\qquad \alpha A \rightleftharpoons \beta B + \gamma C + Q^{cal} \qquad (n = \beta + \gamma - \alpha \geq 0).$$

Les concentrations relatives des constituants étant représentées par $[a]$, $[b]$, $[c]$, les courbes d'isoéquilibre dans les conditions T et P sont définies par

$$(2)\qquad K_a = \frac{[b]^\beta [c]^\gamma}{[a]^\alpha}, \qquad K_p = F(T) = K_a P^n,$$

et le lieu des points représentant l'évolution d'un système isolé représenté par le point M et soumis à la seule réaction (1) est la droite joignant le

(¹) P. Montagne, *Comptes rendus*, 196, 1933, p. 928.

point M au point E, de coordonnées $X = -\alpha/n$, $Y = \beta/n$, $Z = \gamma/n$, que nous avons appelé point caractéristique de la réaction (1). Le point E est situé sur AD ($BD/DC = \gamma/\beta$) à une distance de D égale à α/n fois AD.

L'emploi combiné du diagramme triangulaire et de la loi d'action de masse nous permet de calculer et de représenter les déplacements élémentaires des réactions d'équilibres homogènes par variation de la pression, de la température, ou des concentrations et de compléter ainsi par une formule quantitative les lois qualitatives déjà connues et récemment précisées par MM. H. Le Chatelier et R. Étienne [1].

Définition de l'avancement de la réaction. — I. Le déplacement de l'état d'équilibre sera défini par le nombre de fois $d\xi$ que la réaction (1) se sera produite, à partir de l'état d'équilibre perturbé pour atteindre le nouvel état d'équilibre, ce nombre $d\xi$ étant rapporté à un volume du mélange gazeux égal à celui d'une molécule-gramme placée dans les mêmes conditions. Nous appellerons $d\xi$ *l'avancement moléculaire élémentaire* [2] de la réaction (1) et nous le considérons comme positif si, pendant cette évolution, des molécules du corps A se détruisent pour former de nouvelles molécules des corps B et C.

Cet avancement moléculaire $d\xi$ est représenté par un segment $\overline{MM'}$ reporté sur la droite ME, ayant pour origine le point M et dont la grandeur et le signe sont ceux du produit

$$\overline{MM'} = n.\overline{ME}.d\xi, \tag{3}$$

le sens positif sur $\overline{ME}$ étant celui de M vers E. Si la contraction moléculaire $\beta + \gamma - \alpha = n$ est nulle, le produit n.ME de la formule (3) est remplacé par la longueur v du vecteur de composantes trilinéaires $(-\alpha, \beta, \gamma)$.

II. *Avancement de la réaction dans le déplacement de l'équilibre.* — *a*. L'évolution d'un système chimique subissant un avancement moléculaire $d\xi$ provoque une variation dK_a de la constante K_a (équation 2). Un calcul facile montre que

$$\frac{dK_a}{K_a} = \Xi(M)\,d\xi, \qquad \Xi(M) = \frac{\alpha^2}{[a]} + \frac{\beta^2}{[b]} + \frac{\gamma^2}{[c]} \quad n^2. \tag{4}$$

---

[1] H. Le Chatelier, *Comptes rendus*, **196**, 1933, p. 1557 et 1753; R. Étienne, *Comptes rendus*, **196**, 1933, p. 1887; **197**, 1933, p. 149 et 986.

[2] $d\xi$ est la différentielle de la variable chimique ξ employée par plusieurs auteurs (MM. E. Jouguet, Th. De Donder, etc.).

La fonction $\Xi(M)$ est toujours positive dans le triangle ABC. Elle est maxima sur les côtés et atteint son minimum, égal à $4\,\alpha(\beta+\gamma)$ en un point F de AE, de coordonnées $X_1=\alpha/(\alpha+\beta+\gamma)$, $Y_1=\beta/(\alpha+\beta+\gamma)$, $Z_1=\gamma/(\alpha+\beta+\gamma)$, conjugué harmonique de E par rapport aux points A et D.

b. Déplacement de l'équilibre par *variation de la température*. Soit Q^{cal} la quantité de chaleur dégagée dans la décomposition totale de α molécules de A à la température T. Une variation de température dT à partir de la température T provoque un déplacement de l'équilibre défini par un avancement $d\xi$

$$(5)\qquad d\xi=-\frac{Q}{RT^2.\Xi(M)}\,dT$$

et représenté par un segment

$$(6)\qquad \overline{MM'}=-n.\frac{Q}{RT^2.\Xi(M)}.\overline{ME}.dT;$$

le sens en est bien conforme à celui qu'impose la loi de Van' t Hoff.

c. Déplacement de l'équilibre par *variation de pression*. A température constante, une variation de pression dP impose à un système isolé un avancement $d\xi$

$$(7)\qquad d\xi=-n\frac{dP}{P.\Xi(M)}.$$

La grandeur du segment MM' qui représente la réaction du système est alors

$$(8)\qquad \overline{MM'}=-n^2.\frac{dP}{P.\Xi(M)}.\overline{ME}.$$

Le signe — montre qu'une augmentation de pression provoque une réaction du système tendant à former des molécules A (n est supposé positif ou nul). Si n est nul, $d\xi$ et par conséquent $\overline{MM'}$ sont nuls.

En résumé, nous avons précisé les lois du déplacement de l'équilibre par variation de pression ou de température dans des systèmes homogènes, en substituant aux lois qualitatives des formules quantitatives simples et nous avons montré la possibilité d'une représentation graphique de la réaction des systèmes chimiques contre la variation imposée des variables extérieures, température et pression.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Sur la calorimétrie des solutions salines (système sulfate de soude-sulfate de magnésie-eau).* Note de M. **Jean Perreu**, transmise par M. Pascal.

J'ai effectué, à 19°, des recherches calorimétriques sur les solutions aqueuses ternaires, de sulfate de soude et de sulfate de magnésie, dans le but de vérifier l'équation de solubilité des hydrates. Le diagramme de solubilité du système considéré a été déterminé par MM. Archibald et Gale [1]. L'intersection des nappes de cristallisation du sel de Glauber et du sulfate de magnésie heptahydraté s'étend du voisinage de 0° à 21°,5; les concentrations, sur l'isotherme de 18°,7, sont données par les auteurs ci-dessus.

Concentration des solutions. — Désignons les hydrates $SO^4Na^2.10\,aq.$ et $SO^4Mg.7\,aq.$ par les notations $S_1 s_1$ aq. et $S_2 s_2$ aq. Les concentrations c_1, c_2 d'une solution ternaire expriment le nombre de mol/g de chacun des deux sels, par mol/g d'eau totale. Pour la double saturation, j'emploie les notations C_1, C_2. On a : $C_1 = 0{,}0221$; $C_2 = 0{,}0455$.

Chaleurs spécifiques. — La méthode *calorifère* [2], utilisée pour mesurer les chaleurs spécifiques des solutions, m'a donné les résultats suivants :

A. — Solutions de concentrations ($C_2 = 0{,}0455$ et c_1 variable) :

c_1	0,0221	0,0207	0,0165	0,0124	0,00828	0,00414	0
γ (moyen de 19° à 23°).	0,748	0,750	0,753	0,758	0,762	0,770	0,776

B. — Solutions de concentrations ($C_1 = 0{,}0221$ et c_2 variable) :

c_2	0,0414	0,0372	0,0331	0,0248	0,0165	0,0083	0
γ (moyen de 19° à 23°).	0,751	0,764	0,769	0,791	0,810	0,838	0,870

Ces résultats peuvent être représentés par la relation

$$(1)\qquad \gamma_{(c_1, c_2)} = \frac{a_1 c_1 + a_2 c_2 + 1}{b_1 c_1 + b_2 c_2 + 1},$$

qui généralise au cas actuel la formule $\gamma_c = ac + 1/bc + 1$ de M. Mathias [3], exprimant la chaleur spécifique des solutions aqueuses binaires. Les coefficients $a_1 = 17{,}641$, $b_1 = 27{,}278$; $a_2 = 11{,}481$, $b_2 = 21{,}043$, trouvés par

(1) *Journ. Amer. Chem. Soc.*, 46, 1924, p. 1760.

(2) Bouasse, *Thermodynamique*, I. *Principes généraux*; p. 89.

(3) *Journal de Physique*, 2e série, 8, 1889, p. 204.

M. Mathias dans l'expression des chaleurs spécifiques moyennes, de 19° à 24°, des solutions aqueuses binaires de sulfate de soude et de sulfate de magnésie conviennent ici. Les écarts entre les chaleurs spécifiques mesurées et les résultats donnés par la formule (I) ne dépassent pas 0,003.

Grandeurs thermiques de dissolution, de dilution et de cristallisation. — Je représente par $q_{1(c_1c_2)}$ et $q_{2(c_1c_2)}$ les chaleurs différentielles de dissolution de la mol/g de chacun des hydrates dans la solution (c_1, c_2); $q_{1(C_1C_2)}$ et $q_{2(C_1C_2)}$ expriment les chaleurs limites de dissolution des deux sels; q_{1_0} et q_{2_0} sont les chaleurs initiales de dissolution. $\Lambda(c_1, c_2)$ est la chaleur intégrale de dilution de la solution (c_1, c_2), rapportée à une mol/g d'eau totale. La chaleur différentielle de cristallisation de la mol/g de l'un des hydrates, dans une solution légèrement sursaturée par rapport à ce dernier, et presque saturée de l'autre sel, est figurée par les notations $k_1(\mathcal{C}_1 C_2)$, $k_2(C_2\mathcal{C}_2)$.

Le principe de l'équivalence, appliqué aux solutions ternaires, permet d'exprimer $q_{(c_1c_2)}$, en fonction de q_0 et de $\Lambda(c_1c_2)$. J'ai obtenu les relations :

$$\text{(II)}\quad \left\{\begin{array}{l} q_1(c_1, c_2) = q_{1_0} - s_1\Lambda(c_1, c_2) - (1 - s_1c_1)\left(\dfrac{\partial\Lambda}{\partial c_1}\right)_{c_2} + s_1c_2\left(\dfrac{\partial\Lambda}{\partial c_2}\right)_{c_1}; \\ q_2(c_1, c_2) = q_{2_0} - s_2\Lambda(c_1, c_2) - (1 - s_2c_2)\left(\dfrac{\partial\Lambda}{\partial c_2}\right)_{c_1} + s_2c_1\left(\dfrac{\partial\Lambda}{\partial c_1}\right)_{c_2}. \end{array}\right.$$

Mesure des chaleurs limites de dissolution : α. Méthode directe. — Pour trouver $q_{1(C_1C_2)}$, on mesure la chaleur mise en jeu par la dissolution de la mol/g du sel S_1s_1 aq., dans les solutions de groupe A, ci-dessus ($C_2 = 0,0455$, et c_1 variable de 0 au voisinage de C_1). On trace le graphique $q_{1(c_1c_2)} = f(c_1)$ et l'on extrapole jusqu'à la saturation C_1, ce qui donne $q_1(C_1, C_2)$. Pour obtenir $q_{2(C_1C_2)}$, on opère de même, avec le deuxième sel et les solutions du groupe B.

Concentrations des solutions ($C_2 = 0,0455$: c_1 variable) :

c_1.........	0	0,00414	0,00828	0,0124	0,0165	0,0207	0,0221 (C_1)
$q_{1(c_1c_2)}$ (cal.).	−17,10	−16,65	−16,30	−15,97	−16,72	−15,51	−15,44 (extrap.)

Concentrations des solutions ($C_1 = 0,0221$: c_2 variable) :

c_2.........	0	0,0083	0,0165	0,0248	0,00331	0,0372	0,0414	0,0455 (C_2)
$q_{2(c_1c_2)}$ (cal.).	−3,52	−4,01	−4,43	−4,70	−4,91	−4,97	−5,02	−5,06 (extrap.)

$$q_1(C_1, C_2) = -15^{cal},44; \qquad q_2(C_1, C_2) = -5^{cal},06.$$

β. *Méthode des dilutions.* — Elle repose sur l'application des formules (II), aux solutions doublement saturées. Pour obtenir $q_1(C_1, C_2)$, on mesure q_{1_0}, puis on détermine Λ pour la solution (C_1, C_2), et pour deux solu-

tions, $c_1 C_2$, $C_1 c_2$, c'_1 et c_2 étant voisins de C_1 et C_2. Pour avoir $q_2(C_1, C_2)$, il ne reste qu'à mesurer q_{2_0} et à utiliser pour le calcul les valeurs trouvées pour Λ, $\partial\Lambda/\partial c_1$, $\partial\Lambda/\partial c_2$.

Concentrations des solutions c_1.	c_2.	Λ. (cal)
0,0242 ($\mathcal{C}_1$)	0,0455 (C_2)...	0,0242
0,0221 (C_1)	» » ...	−0,01635
0,0207 »	» » ...	−0,0118
0,0221 (C)	0,0414 » ...	−0,0207

$$q_{1_0} = -18^{cal},7, \quad q_{2_0} = -3^{cal},87 :$$
$$\Lambda(C_1, C_2) = -0,01635$$
$$\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial c_1}\right)_{c_2} = -3,4; \quad \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial c_2}\right)_{c_1} = 1,06.$$

$$q_1(C_1, C_2) = -18^{cal},7 + 0^{cal},16 + 2^{cal},65 + 0^{cal},48 = -15^{cal},41,$$
$$q_2(C_1, C_2) = -3^{cal},87 + 0^{cal},11 - 0^{cal},72 - 0^{cal},53 = -5^{cal},01.$$

γ. *Méthode de cristallisation.* — On opère avec une solution faiblement sursaturée de l'un des hydrates, et presque saturée de l'autre; on ajoute quelques germes cristallins du premier sel, et l'on mesure l'effet thermique de cristallisation.

J'ai trouvé $k_1(\mathcal{C}_1, C_2) = 15^{cal},40$; $k_2(C_1, \mathcal{C}_2) = 5^{cal},10$.

Les valeurs des chaleurs limites de dissolution des deux sels, obtenues par les trois méthodes ci-dessus, présentent par suite un accord assez satisfaisant.

CHIMIE MINÉRALE. — *Action de la vapeur d'eau sur le fluorure cuivrique.* Note de M. **Louis Domange**, présentée par M. H. Le Chatelier.

Au cours de recherches sur l'acide fluorhydrique et les fluorures, Frémy [1] a été amené à observer que l'attaque des fluorures par la vapeur d'eau est possible. Il n'a d'ailleurs fait, à ce sujet, que des observations qualitatives et, par suite, il était intéressant d'étudier les réactions d'équilibre du type :



$F^2Me + OH^2 \rightleftharpoons 2FH + OMe + Q$, Me étant un métal bivalent.

Nos premiers résultats sont relatifs au fluorure de cuivre.

Ce fluorure a été préparé en faisant passer un courant d'acide fluorhydrique anhydre en excès sur du carbonate de cuivre précipité; la température est maintenue pendant 30 minutes à 150°, puis 1 heure à 400°. Le fluorure obtenu est ensuite traité par un courant de fluor à 400°. L'analyse nous donne 99,7 pour 100 du cuivre théorique.

[1] *Annales de Chimie et de Physique*, 347, 1856, p. 1.

Après de nombreux essais infructueux ayant pour but d'appliquer des méthodes statiques, nous avons utilisé une méthode dynamique. Dans ce but, nous envoyons un courant de vapeur d'eau à une vitesse donnée, sur le fluorure à étudier placé dans un tube de platine; l'acidité du mélange sortant est dosée volumétriquement; l'expérience étant répétée avec des vitesses de plus en plus faibles, une extrapolation donne la composition du mélange gazeux pour une vitesse nulle, c'est-à-dire à l'équilibre. En fait, nous ne tendons vers l'équilibre que dans un sens.

En vue de réaliser un débit de vapeur d'eau à la fois faible et régulier, nous envoyons un courant d'hydrogène sur de l'oxyde de cuivre chauffé au rouge. Cet hydrogène est emmagasiné dans deux éprouvettes et déplacé par un courant d'eau de débit constant; il est ensuite purifié par les moyens habituels : permanganate de potassium, tournure de cuivre, ponce sulfurique, ponce phosphorique. Il traverse un indicateur de débit avant de se rendre dans le tube à oxyde de cuivre.

La vapeur d'eau formée pénètre dans une enceinte de platine constituée par un tube de 300^{mm} de longueur et de $6^{mm},5$ de diamètre intérieur, prolongé par un autre tube de 210^{mm} et de 2^{mm} de diamètre intérieur. Dans cette enceinte est disposée une nacelle de platine de 90^{mm} de longueur, pouvant contenir environ $0^{g},6$ de fluorure de cuivre. Le tout est porté à la température voulue par un four à résistance de nichrome. La température est mesurée à l'aide d'un couple platine-platine rhodié placé à l'extérieur du tube et à son contact. A la sortie du tube de platine est vissé un tube d'argent en U de 320^{mm} de longueur et de 4^{mm} de diamètre intérieur, refroidi par de l'air liquide. Ce tube est en relation avec l'atmosphère par l'intermédiaire d'un tube de ponce sulfurique.

Au début du chauffage, avant d'envoyer la vapeur d'eau et avant de fixer le tube d'argent, le tube de platine est balayé par un courant d'azote sec pour achever la dessiccation du fluorure.

En fin d'expérience, le tube d'argent préalablement taré est séparé, pesé, ce qui donne le poids de l'eau et de l'acide fluorhydrique recueillis; il est ensuite rincé à l'eau distillée. Les eaux de lavage sont traitées dans une capsule d'argent par de la soude N/5 et l'excès de soude est titré à chaud avec une solution d'acide chlorhydrique en présence de phtaléine. Ce dosage donne le poids d'acide et, par différence, le poids de l'eau de dilution. La vitesse du courant de vapeur d'eau est obtenue en calculant le volume de vapeur qui a traversé le tube de platine pendant la durée d'une expérience.

Les résultats obtenus dans ces conditions sont rassemblés dans le tableau ci-dessous :

Température.	V.cm³/m.	FH % du volume total.
200° C.....	9,7	7,5
	6,6	8,5
	4,8	9,95
	3,75	10,7
	0	**12,5**
300° C.....	18	10,7
	9,25	13,5
	5,55	14,6
	5,5	14,7
	0	**16**
340° C.....	12,35	20,6
	10,85	21,1
	7,5	22,9
	5,3	22,7
	0	**24,5**
395° C.....	12,5	48,3
	8,7	48,8
	6,05	48
	0	**48,5**
450° C.....	11,85	71,25
	10,15	71
	7,9	71,1
	0	**71,5**

La constante d'équilibre à pression constante a pour expression .

$$K_p = \frac{p^2_{FH}}{p_{OH^2}}.$$

En désignant par k le rapport p_{FH}/p_{OH^2} nous obtenons :

$$K_p = \frac{k^2}{k+1}.$$

En appliquant la relation

$$Q_p \text{ calories} = (\operatorname{Log} K'_p - \operatorname{Log} K_p)\frac{T.T'}{T-T'}\,\frac{R}{J},$$

nous calculons les valeurs de Q :

$$Q_{p_{367}} = -25\,900^{cal},$$
$$Q_{p_{422}} = -24\,450^{cal};$$

nous pouvons donc prendre, de 340° à 450°, $-25\,200^{cal}$.

Nous nous proposons d'étendre nos recherches à d'autres fluorures.

CHIMIE ORGANIQUE. — *L'action de l'oxyde d'éthylène sur l'hydrogène sulfuré.* Note de MM. **Alexis Tchitchibabine** et **Michael Bestougeff**, présentée par M. Delépine.

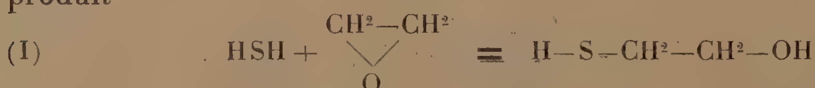
L'oxyde d'éthylène, déjà découvert par Wurtz en 1859, est resté longtemps très peu étudié. C'est seulement dans ces derniers temps, grâce au perfectionnement considérable apporté dans les méthodes de sa préparation, qu'il est devenu plus accessible. On l'obtient industriellement, en l'employant surtout comme produit intermédiaire pour la fabrication d'autres substances. Aussi, dans les dernières années, le nombre de recherches sur ses propriétés physiques et sur ses réactions chimiques a-t-il considérablement augmenté.

Néanmoins, plusieurs réactions assez simples restent inexplorées pour cette substance, très réactive, connue déjà depuis 75 ans.

Ainsi, en mélangeant l'oxyde d'éthylène et l'eau en proportions équivalentes et à une température assez basse, nous avons constaté la formation d'un hydrate cristallin ($C^2H^4O.H^2O$). Il est assez étonnant que jusqu'à présent personne n'ait observé ce phénomène, bien que les solutions aqueuses de l'oxyde d'éthylène aient fait l'objet de nombreuses recherches physicochimiques. L'hydrate en question se présente en aiguilles ou en prismes fondant à $+12°$.

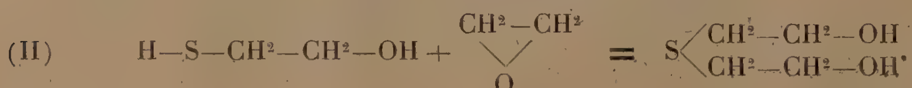
L'action de l'hydrogène sulfuré sur l'oxyde d'éthylène découverte par l'un de nous (T.) restait également inconnue.

Le thioéthylèneglycol se forme dans cette réaction comme premier produit



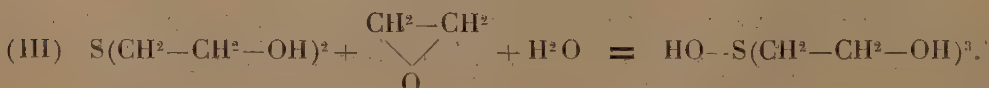
(I) $$HSH + \underset{O}{\overset{CH^2-CH^2}{\diagdown\diagup}} = H-S-CH^2-CH^2-OH$$

et, comme produit ultérieur, le thiodiéthylèneglycol



(II) $$H-S-CH^2-CH^2-OH + \underset{O}{\overset{CH^2-CH^2}{\diagdown\diagup}} = S\begin{cases}CH^2-CH^2-OH\\CH^2-CH^2-OH\end{cases}$$

Enfin ce dernier composé se combine facilement avec 1^{mol} d'oxyde d'éthylène et 1^{mol} d'eau en formant l'hydroxyde de triéthylolsulfinium



(III) $$S(CH^2-CH^2-OH)^2 + \underset{O}{\overset{CH^2-CH^2}{\diagdown\diagup}} + H^2O = HO-S(CH^2-CH^2-OH)^3.$$

Cette substance a les caractères d'une base forte.

Ainsi, dans ce cas, nous observons le phénomène un peu étrange de formation d'une base par combinaison d'une substance acide (H^2S) avec une substance strictement neutre (C^2H^4O).

L'oxyde d'éthylène et l'hydrogène sulfuré se combinent assez lentement sans catalyseurs; la réaction ne se passe qu'en présence d'eau ou d'autres substances contenant un hydroxyle. En présence de ces derniers corps, la vitesse de la réaction est encore plus faible qu'avec de l'eau.

Nous effectuons la réaction dans un tube scellé à une température de 8 à 10°; nous plongeons ce tube dans l'eau pour éviter l'élévation de la température qui peut se produire au cours de la réaction.

En prenant les quantités moléculaires d'eau, d'hydrogène sulfuré et d'oxyde d'éthylène, nous avons obtenu après 10 jours de repos le rendement presque théorique, en thioéthylèneglycol bouillant sous 12^{mm} à 54°.

Si l'on effectue la réaction (II) sans précautions suffisantes contre l'élévation de température, on observe un échauffement considérable du produit.

Dans ce cas, le produit obtenu se présente sous forme d'un mélange contenant une petite quantité de substances fortement alcalines (sulfinium). On obtient également un mauvais rendement en thiodiéthylèneglycol, et la majeure partie du produit est constituée par des fractions visqueuses de température d'ébullition élevée. Ces fractions semblent contenir des composés avec un ou deux résidus polyglycoliques du type



$$S\begin{cases}CH^2-CH^2-O-CH^2-CH^2-OH,\\ CH^2-CH^2-O-CH^2-CH^2-OH.\end{cases}$$

Si l'on évite l'échauffement énergique au cours de la réaction en opérant, par exemple, dans des solutions assez diluées et à des températures assez basses, on peut obtenir de bons rendements en thiodiéthylèneglycol (Eb. 130° sous 2^{mm}).

De façon analogue, la formation de l'hydroxyde de triéthylolsulfinium ne se fait bien que dans des solutions diluées. Les produits condensés précités se forment facilement dans des solutions plus concentrées. Ces produits peuvent se former également pendant la concentration des solutions diluées de la base.

En neutralisant par l'acide chlorhydrique les solutions diluées du sulfinium on obtient, après évaporation, de bons rendements en chlorure de

triéthylolsulfinium : $Cl-S(CH^2-CH^2-OH)^3$. Ce chlorure, déjà connu, cristallise dans l'alcool en aiguilles fondant à 127° [1].

En présence de certains catalyseurs : acides minéraux, chlorure d'aluminium ou métaux lourds, l'oxyde d'éthylène se combine plus rapidement avec l'hydrogène sulfuré.

Nous poursuivons l'étude des produits obtenus dans ces réactions.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Oxydation du carvomenthène par l'anhydride sélénieux. Synthèse du carvotanacétol.* Note de M. **Jean Tabuteau**, présentée par M. Lespieau.

Allard [2] a montré qu'en oxydant 1^{mol} de carvomenthène par 2^{mol} d'anhydride sélénieux en milieu alcoolique on obtenait la carvotanacétone et la thymohydroquinone. Borgwardt et Schwenk [3] ont isolé la carvotanacétone du produit du traitement de 1^{mol} de carvomenthène par 1^{mol} d'anhydride sélénieux en milieu alcoolique. Récemment, Dupont, Zacharewicz et Dulou [4] ont montré qu'en prenant un excès de pinène par rapport à ce réactif oxydant on obtenait, à côté d'un peu de myrténal, surtout du myrténol. Dans l'espoir d'obtenir avec le carvomenthène le carvotanacétol, nous avons oxydé ce carbure.

Le carvomenthène que nous avons utilisé avait les constantes suivantes :

$$E_{760}=175^\circ;\qquad [\alpha]_D=103^\circ{,}50;\qquad d^{18}=0{,}8232;\qquad n_D^{18}=1{,}4580.$$

A 700^g de ce corps dissous dans 600^g d'acide acétique, on ajoute progressivement, en chauffant au bain-marie et en agitant, 275^g d'anhydride sélénieux finement pulvérisé. On maintient à l'ébullition pendant 2 heures environ. Après séparation du sélénium précipité, on soumet le produit à un entraînement à la vapeur d'eau. On sèche, puis on distille pour séparer le carbure non attaqué des produits d'oxydation. On obtient ainsi 200^g ayant distillé sous 16^{mm} entre 62° et 70°, 410^g ayant passé entre 85° et 120° sous 16^{mm} et un résidu de 30^g. Le spectre Raman des produits de tête et l'indice d'hydrogène nous ont montré qu'ils contenaient 50 pour 100 de carvomenthène non attaqué et 50 pour 100 de cymène. Dans le but de séparer les produits

(1) Ettel Kohlik, *Collect. de Trav. chim. tchécoslovaques*, 3, 1931, p. 585. Voir aussi Davies, *Oxford. J. chem. Soc.*, 1931, p. 224.

(2) *Thèse*, Bordeaux, 1933.

(3) *American Chemical Society*, 56, 1934, p. 1185.

(4) *Comptes rendus*, 198, 1934, p. 1699.

d'oxydation, la portion de 410^g a été agitée et laissée en contact pendant une huitaine de jours avec une solution contenant 800^g de SO^3Na^2, 480^g de CO^3NaH et 3000^{cm^3} d'eau. Les produits non combinés sont extraits à l'éther, les autres sont régénérés par une solution de soude et extraits à l'éther. On obtient ainsi 185^g d'un produit cétonique dont les constantes physiques et les dérivés chimiques sont identiques à ceux obtenus par Borgwardt et Schwenk pour la carvotanacétone. De plus le spectre Raman possède les mêmes raies que le spectre obtenu par Dulou ([1]) avec la carvotanacétone.

Les produits non combinés au sulfite de soude ont donné par distillation une fraction de 215^g dont le point d'ébullition est compris entre 110° et 115° sous 14^{mm}. Un indice de saponification nous a montré qu'elle contenait 70 pour 100 d'éther acétique. Un indice d'acétyle met en évidence la présence de 30 pour 100 d'alcool. Après saponification par la potasse alcoolique nous avons isolé une fraction ayant les constantes suivantes :

$$E_3 = 86^\circ; \quad d^{22} = 0,929; \quad n_D^{22} = 1,4790; \quad [\alpha]_D = 7^\circ,97.$$

Réfraction moléculaire $R_m = 46,99$ (th. pour le carvotanacétol 47,23). Le spectre Raman de cette fraction possède une seule raie éthylénique de fréquence 1675 cm^{-1}. Cette fraction hydrogénée par le platine d'Adams en milieu acétique avec quelques gouttes d'acide chlorhydrique fixe une molécule d'hydrogène pour 154^g de produit (une molécule-gramme) et donne un liquide ayant les constantes suivantes :

$$E_4 = 80^\circ; \quad d^{22} = 0,905; \quad n_D^{22} = 1,4630; \quad [\alpha]_D = -1^\circ,10.$$

Réfraction moléculaire $R_m = 47,43$ (th. pour le carvomenthol 47,70). Son spectre Raman et ses constantes physiques permettent de l'identifier avec le carvomenthol obtenu par hydrogénation de la carvone dans les mêmes conditions. Le produit que nous avons obtenu est donc le carvotanacétol.

Il est à remarquer que le spectre du carvomenthol obtenu par hydrogénation du carvotanacétol présente quelques raies supplémentaires dans la région 750-800 cm^{-1}. Ceci paraît dû au fait que le carvotanacétol étudié contient vraisemblablement un mélange des formes cis et trans qui, par hydrogénation, peut conduire à des carvomenthols stéréo-isomères.

Nous nous proposons de séparer ces différents isomères et d'en faire l'étude.

([1]) *Thèse*, Paris, 1934.

LITHOLOGIE. — *Sur quelques gisements de tectites de l'Indochine du Sud.* Note (1) de M. **Edmond Saurin.**

Cette Note a pour but de signaler quelques nouveaux gisements de tectites observés dans l'Indochine du Sud-Est et d'exposer les observations qu'ils permettent. Aux nombreux gisements indochinois indiqués à diverses reprises par M. A. Lacroix (2), je puis ajouter les localités suivantes :

Sud Annam. — *Province de Kontum* : 1° Des tectites m'ont été signalée à Kong Bol.

J'ai personnellement recueilli des tectites aux points suivants :

Province de Pleiku : 2° A 45^{km} du sud du chef-lieu entre les villages jaraïs de Plei Mé Jum et de Plei Hô. *Province du Darlac :* 3° Plei Tung Thang; 4° Buon Thanh; 5° Environs de Buon M'Nar, dans la vallée du Krong Hing; 6° Près de Buon Dlok, dans la vallée du Krong Pach. *Province du Phu-Yen :* 7° Plateau de Van Hoa; 8° Plateau de Phuoc Thuan; 9° Au kilomètre 40 de la route de Tuy Hoa à Cung Son. *Province du Haut-Donnaï :* 10° Le gisement très riche de Dalat, déjà signalé et étudié par M. A. Lacroix (2) s'étend sur tout le plateau du Lang Biang. On trouve des tectites aux environs de Baneur et d'Ankroët. On en trouve aussi d'assez rares fragments à la base Ouest du mont Lang Biang jusqu'à 1640^{m} d'altitude; 11° Contreforts Ouest du massif Bi Doup, à 1600 et 1670^{m} d'altitude; 12° Sur le plateaux Mâ, à Bon M'Rat. *Province du Binh Thuan* (Phan Thiet) : 13° Dans la plaine côtière de Phan Ri, à 3^{km} à l'Ouest de Lê-Nghi.

Cambodge oriental. — *Province de Kratié :* 14° Région de Cheavar, Svai Chrum, Sré Antong; 15° Vallée du Prek Té aux abords du pont qui traverse cette rivière sur la route coloniale n° 13. — *Province de Kompong Cham :* 16° Dans la région de Mimot, à 3^{km} est de Phum Chantors.

Cochinchine. — *Province de Tay Ninh ;* 17° Près de la frontière du Cambodge et de la région de Mimot, à Sroc Con Trang.

Cette rapide énumération qui résulte du hasard de mes derniers itinéraires et non pas de recherches méthodiques montre, *a fortiori*, l'extension et la grande abondance des tectites dans l'Indochine du Sud-Est. Elles s'y trouvent dans ou sur des éluvions et alluvions dont le substratum appar-

---

(1) Séance du 7 janvier 1935.

(2) *Archives Muséum d'Hist. nat.*, 6e série, 8, 1932, p. 146, et *Comptes rendus*, 199, 1934, p. 6.

tient à l'un quelconque des terrains qui constituent le pays : gneiss et micaschistes (Buon Thanh), schistes métamorphiques (plateau du Lang Biang-Lê-Nghi), granite (Plei Mé Jum, Buon D'Lok, Buon M'Nar), andésites et grès permo-triasiques (province de Kratié), dacites (Bi Doup-Lang Biang), basaltes (Bon M'Rat, Plei Tung Thang, Van Hoa, Phuoc Thuan). Cette répartition, indifférente au substratum, montre là encore que les tectites n'ont aucune relation avec celui-ci, et ne se rattachent aucunement à des roches éruptives, contrairement à certaine opinion locale qui veut voir en elles des verres basaltiques, au mépris d'ailleurs de leur composition chimique.

Quant aux relations des tectites avec les alluvions et éluvions dans ou sur lesquelles on les trouve, on peut observer ce qui suit :

A Dalat et dans la vallée du Krong Hinh (Buon M'Nar), elles se trouvent sur des éluvions et sous des alluvions qui recouvrent celles-ci. A Dalat et à Bon M'Rat, on les trouve dans une couche formée de débris de latérite et de roches locales, surmontée d'alluvions récentes qui, sur le plateau du Lang Biang, atteignent près de 2^m dans les dépressions. Mais, dans le plus grand nombre de cas, les tectites se trouvent à la surface d'éluvions et alluvions, associées à des cailloutis comprenant des fragments de latérite et de roches dures du substratum ; ces cailloutis, résultent d'un ruissellement local qui en certains points a concentré ces éléments. Les fragments ferrugineux proviennent de latérite plus ou moins remaniée formée le plus souvent *in situ* dans ces alluvions ou éluvions toujours relativement anciennes.

Celles-ci, plus ou moins latéritisées, forment en effet des terrasses ou recouvrent des niveaux d'érosion dont les plus récents sont à $30\text{-}40^m$ au-dessus des niveaux de base (légèrement plus bas, $20\text{-}25^m$ dans la vallée du Krong Hinh). Je n'ai pas rencontré de tectites dans les alluvions récentes et je n'en connais point notamment dans la vaste région alluviale de la Basse-Cochinchine. La chute des tectites aurait ainsi précédé le dépôt des alluvions récentes.

D'autre part, certaines tectites se montrent encroûtées de concrétions latéritiques (Prek-Té, Lê-Nghi), fait déjà signalé par M. A. Lacroix dans les gisements de Smach (Cambodge occidental) [1] et de Sim San (île d'Hainan) [2].

---

(1) *Comptes rendus*, **188**, 1929, p. 117.
(2) *Ibid.*, **199**, 1934, p. 9.

Or, dans l'Indochine du Sud, les alluvions récentes n'ont pas subi de latéritisation; les dernières en date des latérites, qui sont des latérites pisolitiques le plus souvent non agglomérées, se sont formées dans des alluvions sableuses dont les plus récentes constituent des terrasses de 10^{m}, soit littorales (côte du Sud-Annam), soit fluviatiles (Cochinchine). Selon ce critère, la chute des tectites, qui peut être plus ancienne si j'observe que je n'en ai pas trouvé sur ces bas niveaux, ne pourrait être en tout cas postérieure à la formation et à la latéritisation du niveau de 10^{m}, soit au n° 6 de l'échelle chronologique suivante du Quaternaire du Sud indochinois : 1. Plaines côtières de 125 à 100^{m} (Sud-Annam) et pénéplaine de 100^{m} (Cochinchine) avec cuirasse latéritique. — 2. Basaltes. — 3. Plaines côtières de 100 à 40^{m}. Terrasses de 40^{m} avec latérites du type Bienhoa. — 4. Basaltes. — 5. Terrasses de 20-25^{m} avec latérites du type Bienhoa. — 6. Terrasses de 10-15^{m} avec latérites pisolitiques. — 7. Terrasse marine de 4-5^{m}. Basses terrasses fluviatiles. — 8. Terrasse marine de 2^{m}. — 9. Formations actuelles.

HYDROLOGIE SOUTERRAINE. — *Sur la percée hydrogéologique pénétrable la plus profonde connue : le gouffre Martel (Ariège).* Note de M. **Norbert Casteret.**

L'Union pyrénéenne électrique, voulant capter les eaux du cirque du Lez (Ariège) par un tunnel collecteur en hémicycle, creusé à 1900^{m} d'altitude, fut amené à constater que le torrent d'Albe disparaissait par une étroite crevasse rocheuse dans les hautes régions du cirque, à 2200^{m} d'altitude. Une expérience de coloration, à l'aide de fluorescéine, révéla que la réapparition de ces eaux se produisait à 3^{km} de distance et 530^{m} plus bas (à l'altitude de 1670^{m}) par une résurgence également impénétrable.

Chargé d'éclaircir le mystère de cette circulation pour essayer de récupérer et d'utiliser le torrent souterrain, nous avons découvert, à 1700^{m} d'altitude, une entrée de grotte qui nous a donné accès dans le cours souterrain jusqu'alors inconnu.

Sur une longueur de 1800^{m} le torrent, dont nous avons remonté le cours, s'écoule dans une vaste galerie à pente insensible.

Au delà on se heurte à une série de cascades verticales de 6 à 10^{m} de hauteur que nous avons escaladées avec de grandes difficultés jusqu'à une septième cascade infranchissable, défendue par un lac profond. Ce point est situé à 2050^{m} de l'entrée de la caverne et à environ 100^{m} plus haut.

Non loin de la perte initiale du torrent, à 2170^m d'altitude, nous avons pénétré dans l'orifice étroit d'un puits naturel, jusqu'alors également inconnu, qui débouche sur le cours souterrain du torrent, lequel tombe en une série de cascades imposantes dans une succession de puits superposés.

A la corde lisse et à l'aide d'échelles de corde, nous avons pu descendre jusqu'à 225^m de profondeur, où nous avons été arrêtés par la violence des cascades, leur température intolérable (4°) et faute de matériel.

Le plan exact de cette énorme cavité nous a révélé qu'à 135^m de profondeur le gouffre souterrain n'est séparé des falaises du cirque que par une épaisseur de roche de 70^m. C'était la solution du problème de la récupération du torrent souterrain. Un tunnel horizontal de 70^m de long, creusé de l'extérieur vers l'abîme, va être prochainement creusé pour ramener au jour les eaux qui, par leur cours souterrain, échappaient au plan de captage et qui, désormais, iront actionner les turbines de l'usine hydroélectrique d'Eylie, située à 1000^m en contre-bas, dans la vallée.

A cette application utilitaire et industrielle d'une exploration souterraine, s'ajoute le fait que cette percée hydrogéologique de 530^m de dénivellation est pénétrable sur 482^m de profondeur et le deviendra peut-être en totalité après le captage et la dérivation projetés qui supprimeront les cascades souterraines, les lacs et la rivière plane de l'étage inférieur.

Cette profondeur de 530^m serait alors la troisième par ordre de grandeur après le Bus della Preta (Italie) qui mesure 637^m et l'abîme de Gorchia (Italie) qui atteint 533^m.

L'étude de cette circulation souterraine qui s'effectue de bout en bout à un contact géologique (calcaires dévoniens et schistes ordoviciens) confirme que le creusement, dans une crevasse de dislocation préexistante, s'est fait par érosion, corrosion et pression hydrodynamique des eaux tourbillonnaires.

On savait que beaucoup de gouffres servaient de réservoirs à des résurgences situées beaucoup plus bas et parfois fort éloignées; mais les grands gouffres connus avaient toujours été trouvés sans issue par suite de rétrécissements, éboulements ou siphonnements. C'est seulement sur des profondeurs inférieures à 100^m, qu'on avait pu, comme à Bramabiau (Gard, 1888), la Couronnelle à Minerve (Hérault, 1903), etc., pénétrer par un gouffre et ressortir par une résurgence. Celui que nous avons découvert en 1932-1933 possède deux orifices; il est traversé du haut en bas par un torrent très actif et permanent qui constitue la percée hydrogéologique

pénétrable la plus profonde connue, elle est remarquable encore par son altitude.

Ce dispositif illustre, de la plus heureuse façon et à la plus vaste échelle constatée, le mécanisme de ces percées et confirme en tous points les observations accumulées et les lois formulées depuis 1888 sur les abîmes et les eaux souterraines par M. E.A. Martel. Pour ces raisons nous avons donné au nouvel abîme, qui est le plus profond de France, le nom de *Gouffre Martel*.

GÉOGRAPHIE PHYSIQUE. — *Aréisme et mouvements du sol dans les plaines argentines*. Note (¹) de M. **Emmanuel de Martonne**.

Une enquête sur l'extension du domaine aréique dans l'Amérique du Sud m'a permis de montrer qu'il traverse en diagonale le continent du rivage pacifique au rivage atlantique (²). Comme cause de cette anomalie, sans autre exemple à la surface du Globe, j'ai indiqué une combinaison particulière des influences climatiques et les conditions spéciales du relief des Andes, dont le morcellement a créé une série de bassins abrités précisément à la latitude où la dégradation du régime pluviométrique est le plus marquée. Il reste à expliquer l'absence d'écoulement dans des plaines comme le Chaco méridional et la Pampa, où les précipitations sont plus abondantes que dans le Bassin Parisien, et où les Indices d'aridité (³) sont souvent supérieurs à 30. Les recherches à ce sujet me conduisent à envisager une extension des phénomènes orogéniques qui affectent les Andes aux plaines elles-mêmes.

L'organisation du drainage suppose non seulement une certaine relation entre les précipitations et l'évaporation, mais l'existence d'un système de pentes continues dirigées vers la mer, ou la possibilité d'en réaliser un par érosion ou remblaiement. Cette possibilité peut être supprimée par des mouvements du sol, même de faible amplitude, s'ils sont persistants, et cela d'autant plus facilement que la nature du sol est moins favorable à l'écoulement superficiel (terrains perméables, cailloutis, sables, loess). Or la plaine argentine offre soit des pentes trop faibles, soit des pentes tournées vers des dépressions intérieures; il est impossible de comprendre

(¹) Séance du 7 janvier 1935.

(²) *Comptes rendus*, 198, 1934, p. 592.

(³) J'ai défini l'indice d'aridité (*Comptes rendus*, 182, 1926, p. 1395) comme une fonction des précipitations et de la température.

leur persistance si elles ne sont pas entretenues par des mouvements du sol; et cette hypothèse paraît vérifiée dans certains cas.

Le sud de la Province de Buenos-Aires, où les pluies sont de 800^{mm} et l'indice d'aridité de 30, peut être cité comme exemple de ce que j'ai proposé d'appeler l'*aréisme humide* (1). Les grandes pluies y amènent des inondations couvrant la moitié des terres. L'eau s'infiltre ou s'évapore sur place. Les travaux ou projets des ingénieurs sont restés vains (2). D'après les cartes détaillées de l'Institut géographique de Buenos Aires, qui montrent la multiplication des lacs sans écoulement, les pentes sont souvent comprises entre 0,1 et 0,3 pour 1000, valeurs trop faibles pour l'écoulement sur un sol de loess.

La plaine du Chaco argentin est encore peu connue. Les indications des stations météorologiques situées du côté du Parana ou au pied des Andes ne permettent pas d'attribuer à son centre des précipitations inférieures à 700^{mm} et des indices d'aridité de moins de 20. Elle n'est cependant traversée que par un très petit nombre de rivières venant toutes des Andes; aucun cours d'eau ne peut s'y former, en dehors des abords du Parana, où la nappe phréatique donne des sources salées. Or les pentes, mesurées grâce aux nivellements des lignes de chemins de fer, sont extraordinairement faibles pour une plaine alluviale construite par des cours d'eau montagnards à régime tropical; elles ne dépassent 1 pour 1000 qu'au pied des Andes, sur une largeur de 70 à 80^{km}, et restent voisines de 0,3 pour 1000 sur 300 à 400^{km}. Pourtant le Rio Dulce de Tucuman, le Rio Lerma de Salta, le Juramento, le Rio Grande de Jujuy charrient tous de gros galets au débouché des montagnes et sont accompagnés de terrasses étagées dans les dépressions subandines. Ils ont maintes fois changé de lit dans la plaine, où de nombreuses traînées marécageuses indiquent que l'alluvionnement s'est étalé partout. On est conduit à supposer un tassement qui contre-balance l'accumulation.

Sa réalité est prouvée par le cas du Mar Chiquita de Cordoba, grand lac saumâtre sans écoulement, où viennent se concentrer les eaux du Rio Dulce. Ces eaux atteindraient peut-être le Parana, sans le jeu d'une faille Nord-Sud, à regard occidental, établie par les sondages qui ont montré le

---

(1) Em. de Martonne et L. Aufrère. *Les régions privées d'écoulement vers la mer* (*Public. de l'Union géogr. internationale*, 1928).

(2) Voir le Rapport officiel de l'ingénieur G. Posadas, *La solución del problema de los desagues e inundaciones en la Provincia de Buenos-Aires*, 1933.

Trias butant contre le cristallin. Cette dislocation, voilée par les sédiments pampéens, est parallèle aux failles méridiennes bien visibles dans les Sierras de Cordoba et à celle qui, d'après Frenguelli, aurait fixé la position de la berge du Parana dans l'Entre Rios.

Plus au Sud, les plaines de Mendoza et San Juan montrent dans les anomalies de l'hydrographie l'influence d'un jeu de blocs semblable, voilé par le Pampéen. En raison du climat beaucoup plus sec (précipitations, 250^{mm}; indice d'aridité, 5 à 10), on ne trouve plus de lacs saumâtres, comme le Mar Chiquita, mais des plaines salines (Salinas), occupant des ombilics, vers lesquels les eaux des Rios montagnards sont attirées suivant les tracés les plus inattendus, et d'où elles ne réussissent à échapper, parfois, que très diminuées. Un de ces ombilics, la Laguna Bebedero, a été occupé au Quaternaire par un lac d'eau douce, comme le prouve la faune des plus hautes terrasses qui entourent la plaine saline actuelle (Doering). On ne saurait comprendre le tracé du Rio Mendoza et celui du Desaguadero sans admettre qu'ils suivent des lignes de dislocation, voilées par les sédiments pampéens. Les tremblements de terre fréquents, qui ont détruit Mendoza au XIXe siècle, témoignent de l'instabilité persistante du Piémont andin.

Le cas des plaines argentines n'est sans doute pas unique ; nous y voyons un des meilleurs exemples de l'influence de mouvements du sol récents sur l'extension de l'aréisme.

CYTOLOGIE VÉGÉTALE. — *Influence de la tensio-négativité sur la structure de la cellule végétale.* Note de M. **Marcel Mascré** et Mlle **Alice Rollen**, présentée par M. L. Mangin.

Si de nombreuses recherches ont été consacrées à l'étude du rôle que joue la tension superficielle dans les phénomènes biologiques, il ne semble pas que l'on ait étudié systématiquement son influence sur la structure même de la cellule vivante. Sans doute, des substances comme l'éther et le chloroforme, qui agissent sur la tension superficielle, ont été étudiées à ce point de vue, notamment par l'un de nous ([1]). Mais l'action de ces substances est trop complexe pour que l'on puisse dégager nettement la part qui revient, dans leur action, à leurs seules propriétés tensio-actives. C'est pourquoi

([1]) M. Mascré et P. Picard, *Bull. Soc. Bot. Fr.*, 80, 1933, p. 326.

nous avons entrepris de nouvelles recherches en utilisant les octanols primaire et secondaire.

L'expérience a consisté à immerger pendant un temps variable (de quelques minutes à six heures) des racines d'*Allium sativum*, préalablement développées dans l'eau, dans de l'eau saturée d'octanol. De telles solutions ont une tension superficielle statique de 32 à 36 dynes (eau distillée : 72 dynes) et renferment un pourcentage d'octanol qui peut varier de 1 pour 20000 à 1 pour 100000. Il nous apparaît qu'on peut rapporter au seul abaissement de la tension superficielle du liquide les modifications provoquées dans la structure de la cellule. Ces modifications ont été établies par comparaison avec des témoins sur des pièces fixées aux liquides de Flemming, de Meves, de Regaud (formol-bichromate), après coloration des coupes par les méthodes d'Heidenhain, de Regaud, de Küll, ou par la safranine et le vert Lumière. Ce sont les suivantes :

On observe peu de changement au niveau des chromosomes qui conservent leur forme et leur colorabilité; on constate seulement parfois un léger gonflement, avec tendance à la confluence de chromosomes voisins Les noyaux au repos, en interphase ou aux débuts de la prophase, lorsque les chromosomes n'ont pas encore achevé leur différenciation, sont modifiés de façon plus marquée. Ils diminuent nettement de volume : de moitié environ; la membrane devient moins distincte; le réseau nucléaire s'efface et l'on obtient finalement une masse sensiblement homogène et très faiblement sidérophile. Les nucléoles tendent à disparaître; ils perdent de leur homogénéité, prennent un aspect vacuolaire, se résolvent finalement en granulations sidérophiles qui, dans les expériences de longue durée (5 ou 6 heures), peuvent elles-même disparaître; on ne trouve plus trace, alors, des nucléoles. Assez fréquemment, on a observé uue fragmentation ou un étirement de la masse nucléaire.

Le cytoplasme est à peine modifié. Contrairement à ce qu'on a observé avec des solutions aqueuses d'éther ou de chloroforme, il n'y a pas plasmolyse; il n'y a pas granulisation du cytoplasme et la structure vacuolaire demeure sensiblement inchangée.

Le chondriome est très rapidement modifié; il est détruit à peu près complètement en quelques minutes. Les chondriocontes se résolvent d'abord en grains, comme l'un de nous l'a observé après action de l'éther ou du chloroforme [1]. Puis, apparaissent de très nombreuses vésicules se colo-

---

[1] M. Mascré et P. Picard, *loc. cit.*

rant par les méthodes mitochondriates. Lorsque cette transformation est achevée, on n'observe plus, dans la cellule, que des grains et des vésicules. En même temps, il y a lipophanérose et la cellule renferme un certain nombre d'inclusions lipidiques fortement réductrices. Ces inclusions sont nettement distinctes des vésicules signalées précédemment. Cependant, certaines de ces vésicules présentent, à leur intérieur ou sur leur pourtour, des granulations osmio-réductrices.

Si l'action de l'eau octanolée rappelle par divers points celle de l'eau éthérée ou chloroformée, on constate cependant quelques différences. Dans les expériences de M. Mascré et P. Picard, il y avait seulement granulisation sans vésiculisation des chondriocontes; ici la vésiculisation est très sensiblement constante. L'eau octanolée ne provoque pas la granulisation du cytoplasme et le vacuome n'est pas modifiée; il n'y a pas non plus plasmolyse. On n'a pas observé les aspects d'alvéolisation des noyaux prophasiques que provoque l'eau éthérée ou chloroformée. Enfin, la disparition du nucléole, que peuvent parfois provoquer l'éther ou le chloroforme se fait ici avec une allure assez particulière.

PHYSIOLOGIE VÉGÉTALE. — *Variations de l'imbibition plastidale pendant la chloroplastogenèse, l'amylogenèse et l'amylolyse.* Note de M. **Albert Maige**, présentée par M. Marin Molliard.

J'ai montré antérieurement le rôle important que joue l'imbibition dans les variations de volume du noyau et dans les processus physicochimiques qui déterminent l'apparition des vacuoles amylogènes dans le stroma plastidal.

De même que les noyaux, les plastes peuvent présenter une croissance organique, qui se produit notamment pendant la croissance cellulaire, et qui pour les chloroplastes se manifeste nettement dans les cellules où ces organites sont en voie de division.

La différenciation des chloroplastes aux dépens des leucoplastes dans les cellules en croissance est accompagnée, comme le montrent les observations de Guilliermond, d'une forte augmentation de volume; il est légitime de penser que celle-ci est le résultat d'un développement organique de la substance plastidale en rapport avec la croissance de la cellule, et d'autre part de l'union étroite des micelles de chlorophylle aux micelles du plaste, dans l'édifice coloïdal d'aspect homogène, qui constitue ce dernier. Cet

accroissement de volume est d'ailleurs des plus apparents, lorsque l'on compare dans une cellule de tubercule de Pomme de terre en hydrolyse un plaste amylifère verdissant à un plaste analogue non verdissant. A ces deux facteurs, qui ont leur valeur, doit s'ajouter un troisième, le plus important de tous, qui est l'état d'imbibition du plaste vert.

Il est indéniable en effet, que le plaste chlorophyllien peut présenter de grandes variations d'imbibition. Leur existence résulte immédiatement de la diminution considérable de masse que présente l'écorce verte d'un chloroplaste foliaire pourvu à la fin de la journée d'un volumineux grain d'amidon, vis-à-vis du même chloroplaste dans lequel cet amidon a disparu pendant la nuit. Or la quantité de chlorophylle du plaste n'a pas varié, et il est logique de supposer que la substance organique du plaste, qui lui est étroitement associée, s'est conservée également. Il faut donc attribuer la réduction de volume de la masse chloroplastidale à une différence d'imbibition, pouvant porter d'ailleurs aussi bien sur les micelles plastidales incolores que sur les micelles chlorophylliennes : le plaste vert se désimbibe pendant la formation de l'amidon et se réimbibe pendant sa digestion.

Des variations d'imbibition moins importantes, mais de même ordre, se manifestent au cours de l'amylogenèse et de l'amylolyse chez les leucoplastes.

On sait, d'après les observations de Guilliermond, que dans les volumineux grains d'amidon des tubercules de Pomme de terre le volume de l'écorce plastidale diminue au cours de la synthèse. Or si l'on apprécie la masse de ce stroma, par rapport à celle du plaste originel, en comparant les réactions chloroplastogènes des plastes amylifères dans les cellules jeunes de l'extrémité et adultes de la base de rejets verdissant activement, on constate qu'au cours de l'amylogenèse il s'est produit une forte augmentation de la masse organique plastidale. Ce fait est confirmé d'ailleurs par cette observation que dans les cotylédons de Légumineuses, où les phénomènes d'accumulation d'amidon sont entièrement comparables, la masse plastidale, plus ou moins teintée de vert par la chlorophylle, s'accroît notablement comme je l'ai signalé antérieurement pendant la période de croissance du grain.

Si donc, chez la Pomme de terre, le volume du stroma plastidal apparaît à la fin du développement du grain en diminution, il faut en conclure à un phénomène de désimbibition. Cette désimbibition est moins accusée sur la face du grain, que recouvre la calotte plastidale, que sur la face opposée, et cette différence qui constitue l'un des signes de l'hétérogénéité

physicochimique du plaste, se trouve confirmée par cette observation, que la réaction loculaire des gros plastes amylifères, pendant l'hydrolyse dn tubercule, se manifeste toujours, quand elle a lieu, sur la face opposée au hile, au sommet ou sur les côtés de la calotte. Ce phénomène de désimbibition, qui est masqué dans les cotylédons des Légumineuses par la présence des micelles de chlorophylle et par l'accroissement organique plastidal, doit être regardé comme un des signes traduisant la modification chimique résultant pour le plaste de son activité amylogène. Cette modification défavorable à la vie du plaste peut d'ailleurs entraîner la mort de la région de cet organite où elle est la plus accusée comme le montre la présence dans les cotylédons de diverses Légumineuses et dans le tubercule de Ficaire, de nombreux grains d'amidon dont une moitié corrodée et à digestion interne témoigne de la disparition sur cette face de l'écorce plastidale.

Les phénomènes d'imbibition des leucoplastes pendant la digestion du grain d'amidon sont faciles à observer, dans de nombreuses cellules amylifères (tubercules de Pomme de terre, de Ficaire, écailles de Lis, etc.) où le stroma devient nettement plus épais pendant l'hydrolyse et certains de leurs aspects ont été décrits sous le nom de régénération du plaste.

En résumé, il résulte de ce qui précède que la chloroplastogenèse et l'amylolyse déterminent chez les plastes un accroissement d'imbibition, tandis que l'amylogenèse exerce une action inverse.

BIOLOGIE VÉGÉTALE. — *Réactions d'immunité des plantes vis-à-vis du* Bacterium tumefaciens. Note [1] de M. J. **Magrou**, présentée par M. A. Gosset.

Le *Bact. tumefaciens* ne se développe pas au sein des tissus dont il provoque la prolifération. Ce fait nous a conduit à chercher si le suc des végétaux sensibles ne serait pas capable d'agir *in vitro* sur la bactérie cécidogène.

Pouvoir agglutinant. — Son existence a été recherchée, chez le *Pelargonium zonale* et le *Chrysanthemum frutescens* : 1° dans le suc des tumeurs; 2° dans le suc des plantes saines; 3° dans le suc des parties saines de rameaux portant une tumeur. Le suc végétal, obtenu par broyage et filtré sur bougie Chamberland L_3, est réparti, aux concentrations de 1/50e, 1/100e,

---

[1] Séance du 7 janvier 1935.

1/200e, 1/500e, 1/1000e, dans une série de tubes renfermant des suspensions de *B. tumefaciens* (1^{cg} de germes pour 20$^{cm^3}$ d'eau salée). Dans quelques expériences, nous avons éprouvé l'action de concentrations plus faibles (1/2000e, 1/5000e, 1/10 000e), ou plus fortes (1/10e). Les tubes sont examinés après 24 heures de séjour à la température du laboratoire.

Dans ces conditions, le *suc de tumeur* a constamment produit une agglutination qui, 8 fois sur 11 dans le cas du *Pelargonium*, était encore nette au taux de 1/1000e (dilution maxima essayée), et 4 fois sur 6 dans le cas du *Chrysanthemum*, se manifestait encore au taux de 1/10 000e. (Dans les cinq autres expériences, la plus forte dilution donnant lieu à l'agglutination variait de 1/200e à 1/4000e.)

L'intensité de l'agglutination se maintient à un maximum aux concentrations les plus fortes; puis, à partir d'une certaine dilution, elle diminue proportionnellement à la concentration. Le graphique qui représente l'intensité de l'agglutination en fonction de la concentration, a donc la forme d'un plateau horizontal, suivi d'une ligne oblique descendante.

Les suspensions bactériennes ont été préparées à partir de deux races distinctes de *B. tumefaciens*, dont l'une est pathogène pour le *Pelargonium* mais non pour le *Chr. frustescens*, tandis que l'autre est pathogène à la fois pour les deux espèces. Le suc de tumeur de *Pelargonium* agglutine indifféremment les deux races; le suc de tumeur de Chrysanthème, 5 fois sur 6, a agglutiné de façon plus intense et à des dilutions plus élevées la souche pathogène pour le Chrysanthème; dans le sixième cas, cette spécificité ne s'est pas manifestée.

Le *suc des plantes saines* s'est montré doué aussi, fréquemment sinon constamment (11 fois sur 13), de pouvoir agglutinant, mais le phénomène affecte une allure différente. Au lieu que l'intensité de l'agglutination soit proportionnelle à la concentration du suc végétal, elle est, le plus souvent, nulle aux concentrations fortes, atteint rapidement un maximum pour une concentration optima, puis décroît brusquement aux concentrations plus faibles. Elle ne se produit donc que dans une zone de concentrations *étroitement limitée*, et la représentation graphique du phénomène donne une courbe en clocher. On voit par là que le suc tumoral diffère nettement du suc normal par l'élargissement de la zone de concentrations où il est capable de provoquer l'agglutination.

Quant au suc des parties saines de rameaux porteurs de tumeurs, dans un cas il n'a pas agglutiné, dans trois cas il a donné une agglutination de même type que le suc de tumeur.

Quelle que soit son intensité, l'agglutination observée dans ces expériences est incomplète : les flocons, formés de bactéries agglomérées, et non dissociables par agitation, sont en suspension dans un liquide louche, renfermant des germes répartis uniformément. Les suspensions témoins, sans suc végétal, ne s'agglutinent jamais. La propriété agglutinante ne paraît pas due au tannin qui existe dans les sucs étudiés, car des solutions de tannin, de concentrations échelonnées entre 1/500e et 1/20 000e, s'en sont montrées dépourvues. Elle disparaît, d'ailleurs, après chauffage d'un quart d'heure à 100°, alors qu'elle résiste une demi-heure à 80°.

Les sucs de tumeurs ou de parties saines de *Pelargonium* et de *Chrys. frutescens* n'agglutinent pas des bactéries phytopathogènes autres que le *B. tumefaciens* (*Bact. malvacearum*, *flaccumfaciens*, *mori*, *Bacillus carotovorus*). Le suc de tumeurs de Betteraves n'agglutine pas le *Bact. tumefaciens*, fait à rapprocher des résultats négatifs obtenus par M. Riker avec les tumeurs de Tomate.

Pouvoir précipitant. — On prépare des extraits bactériens en dissolvant dans 20$^{cm^3}$ d'eau physiologique 1^{cg} de poudre obtenue par broyage des bactéries avec du sulfate de soude anhydre. On filtre sur terre d'infusoires, puis sur bougie, et l'on répartit à raison de 0$^{cm^3}$,5 d'extrait par tube. On verse sur l'extrait (en ayant soin que les liquides limpides restent superposés, sans se mélanger), 0$^{cm^3}$,5 de suc végétal dilué au 1/20e, au 1/50e, au 1/100e, au 1/200e. Dans ces conditions, le suc de tumeur de *Chr. frutescens* donne immédiatement, en présence des extraits des deux souches de *B. tumefaciens*, un précipité visible sous forme d'un disque opalescent à la limite des deux liquides (dans certains cas, on voit se former deux disques superposés). Plus tard, le précipité se rassemble au fond du tube, et le liquide se trouble par agitation. Le pouvoir précipitant s'exerce non seulement sur le *Bact. tumefaciens*, mais aussi sur les *B. malvacearum*, *flaccumfaciens*, *mori* et *carotovorus*. A cet égard, il est donc moins spécifique que le pouvoir agglutinant. Mais, au contraire de ce dernier, il ne se rencontre que chez les plantes malades : le suc des tiges et des feuilles de Chrysanthèmes sans tumeurs ne précipite pas les extraits de *Bact. tumefaciens*, alors que le suc des parties saines d'un rameau portant une tumeur, dans un cas où son action a été éprouvée, s'est montré doué du même pouvoir précipitant que le suc de la galle même.

PHARMACOLOGIE. — *Rapports entre la constitution de quelques amino-éthers-oxydes et leurs actions pharmacodynamiques.* Note [1] de M[lles] **Jeanne Levy**, **Denyse Kohler** et M. **L. Justin-Besançon**, présentée par M. Ch. Achard.

Bien que deux très importantes substances médicamenteuses, l'éther et la thyroxine, possèdent la fonction éther-oxyde, l'étude pharmacodynamique systématique des amino-éthers-oxydes ne fut poursuivie que très récemment [2]. Déjà l'une d'entre nous (*loc. cit.*) a pu établir une distinction entre les amino-éthers-oxydes de la série aromatique et ceux de la série grasse, les premiers provoquant une action adrénolytique, les seconds n'influençant nullement l'action hypertensive de l'adrénaline.

Le présent travail nous a permis, à l'aide de techniques particulières, de préciser plus complètement les relations existant entre la constitution chimique de quelques amino-éthers-oxydes et leurs actions pharmacodynamiques

La technique expérimentale que nous avons utilisée, et qui a déjà été employée par deux d'entre nous [3], consiste à examiner, après administration d'une dose d'environ $0^g{,}020$ par kilogramme de toute une série d'amino-éthers-oxydes, le comportement de l'appareil oculo-pupillaire du chien dont on a provoqué, préalablement, la protrusion du globe oculaire et la mydriase par injection intraveineuse de $0^g{,}005$ de chlorhydrate d'éphédrine par kilogramme.

Les amino-éthers-oxydes que nous avons examinés sont au nombre de 16 et peuvent être divisés en deux groupes principaux :

Premier groupe. — Amino-éthers-oxydes adrénolytiques qui, à l'exemple de l'yohimbine et des dérivés du dioxane, font rétrocéder, d'ailleurs à des degrés divers, l'exophtalmie éphédrinique.

Dans ce groupe se rangent des amino-éthers-oxydes de la série aromatique $Ar - O - CH^2 - CH^2 - N =$.

---

(1) Séance du 7 janvier 1935.

(2) S. Anan, *Jap. med. Sc. Pharm.*, 4, 1930, p. 70; Okazaki, *Jap. med. Soc. Pharm.*, 6, 1932, p. 23 et 133; Nagasaki, *Igakkai Zassi*, 10, 1932, p. 583; Jeanne Lévy et Ditz, *Premier Congrès de Thérapeutique*, 23 novembre 1933, p. 248, et *Archives internat. de Pharm. et de Thérap.*, 47, 1934, p. 138; Bovet et Maderni, *C. R. Soc. de Biol.*, 44, 1933, p. 981.

(3) Marcel Labbé, Maurice Villaret, L. Justin-Besançon, M[lle] D. Kohler, M[me] Schiff-Wertheimer et P. Soulié, *Comptes rendus*, 193, 1931, p. 260.

Notons la phénoxy-1-éthylamine, la bi-(phénoxy-1-éthyl)-amine, le phénoxy-1-amine-2-éthane, le phénoxy-1-diméthylamino-2-éthane, le phénoxy-1-diéthylamino-2-éthane, le phénoxy-1-pipéridyl-2-éthane, le phénoxy-1-éthanolamino-2-éthane, l'*o*-méthoxyphénoxy-diméthylamino-2-éthane, l'*o*-méthoxyphénoxy-1-éthanolamino-2-éthane.

Deuxième groupe. — Amino-éthers-oxydes non adrénolytiques. Ceux-ci comprennent deux catégories :

1° Amino-éthers-oxydes qui, sans provoquer la rétrocession de l'exophtalmie éphédrinique, déterminent la disparition de la mydriase provoquée par cet alcaloïde et qui permettent de réaliser expérimentalement une exophtalmie du type basedowien.

Les substances qui permettent de réaliser ce phénomène sont des amino-éthers-oxydes dans lesquels l'oxygène se trouve placé entre deux chaînes linéaires courtes $R - CH^2 - O - CH^2 - N =$; le radical R étant soit un CH^3, soit un noyau ; parmi ces substances, l'éthoxy-1-diméthylamino-2-éthane, l'éthoxy-1-diéthylamino-2-éthane, la benzyloxy-1-diméthylamino-2-éthane, la benzyloxy-1-diéthylamino-2-éthane, la benzyloxy-1-éthanolamino-2-éthane.

2° Amino-éthers-oxydes qui, loin de provoquer la rétrocession de la mydriase et de l'exophtalmie, sensibilisent l'appareil oculo-pupillaire à l'éphédrine sans provoquer de rétrocession de la mydriase ou de l'exophtalmie.

Ces substances sont des amino-éthers-oxydes de la série grasse du type $R - CH^2 - O - CH^2 - CH^2 - N =$: dans lesquels est une chaîne en C^3 ; ce sont le butoxy-1-diméthylamino-2-éthane et le butoxy-1-diéthylamino-2-éthane.

Conclusions. — Les amino-éthers-oxydes, dont nous avons examiné l'action pharmacodynamique, peuvent être divisés en deux groupes principaux :

I. Les amino-éthers-oxydes de la série aromatique


$$Ar - O - CH^2 - CH^2 - N =$$

qui, d'une part, sont adrénolytiques et, d'autre part, font rétrocéder l'exophtalmie éphédrinique.

II. Les amino-éthers-oxydes de la série grasse ou mixte


$$R - CH^2 - O - CH^2 - CH^2 - N =$$

qui ne sont pas adrénolytiques : 1° les uns dans lesquels l'oxygène se trouve placé entre deux chaînes linéaires courtes font rétrocéder la mydriase éphédrinique sans toucher à l'exophtalmie, permettant de réaliser expéri-

mentalement une exophtalmie du type basedowien; 2° certains autres dans lesquels R est une chaîne en C^3 sensibilisent au contraire l'appareil oculo-pupillaire à l'action de l'éphédrine.

BIOLOGIE EXPÉRIMENTALE. — *La morphologie comparée des cellules visuelles et la théorie de la dualité de la vision.* Note de Mlle **Marie-Louise Verrier**, présentée par M. E.-L. Bouvier.

L'existence, chez l'Homme et certains Vertébrés, de deux formes bien distinctes de cellules visuelles, les cônes et les bâtonnets, a conduit à attribuer, sans preuve indiscutable cependant, un rôle différent et bien défini à chacune de ces sortes d'éléments. Schultze (1), constatant chez quelques espèces diurnes, Oiseaux et Reptiles principalement, des cellules visuelles comparables aux cônes humains, considère ces éléments comme les organes de la vision en milieu éclairé. Inversement, les bâtonnets lui paraissent être les organes de la vision en milieu obscur, parce qu'il rencontre des éléments rappelant les bâtonnets de l'Homme chez les animaux crépuscu-laires ou nocturnes.

J'ai déjà eu l'occasion de montrer que les observations de Schultze sont limitées à un très petit nombre de cas et que l'étude comparée de la rétine et du comportement d'un grand nombre d'individus met souvent les conclusions de cet auteur en défaut. J'ai ainsi signalé des bâtonnets typiques chez des animaux vivant en milieux éclairés et des cônes typiques chez des animaux vivant en milieux obscurs (2).

Il apparaît donc déjà que l'étude du comportement ne peut servir d'appui à la théorie de la dualité de la vision. Comme le voudraient Schultze et ses successeurs et tout spécialement G. L. Walls dans les mémoires qu'il vient de publier (3).

Un autre argument en faveur de la théorie de la dualité réside en une distinction précise et rigoureuse entre la forme cône et la forme bâtonnet.

Comme pour les observations de Schultze, quelques faits paraissent en faveur de cette opinion : la rétine de l'Homme, de divers Mammifères (Chien, Chat, Porc entre autres) de plusieurs groupes de Téléostéens

(1) *Archiv. f. Mikrok. Anat.*, 2, 1866, p. 175; 3, 1866, p. 215.

(2) M.-L. Verrier, *Comptes rendus*, 195, 1932, p. 1333.

(3) *Brit. Journ. of ophtalm.*, 17, 1933, p. 758; *Amer. Journ. of ophtalm.*, 7, 1934, p. 892.

(Cyprins, Silures, Rascasses, Pleuronectes, tout particulièrement) en sont des exemples. Mais, à côté de ces faits, d'autres, aussi nombreux et aussi caractéristiques ([1]), montrent qu'il est souvent difficile de distinguer les deux sortes d'éléments : les rétines de Vipéridés et de nombreux Oiseaux diurnes ont fait l'objet de discussions. Elles renferment des cônes à myoïdes normalement allongés, qui ont été pris pour des bâtonnets. Une même sorte d'élément peut, suivant les diverses régions d'une rétine, se présenter sous divers aspects : à cet égard, encore, les cônes de Reptiles et des Oiseaux sont très démonstratifs; dans les régions périphériques de la rétine sont des cônes typique à segment externe court et conique, à ellipsoïde globuleux et accompagnés d'une grosse goutte huileuse. Dans les régions fovéales et périfovéales, chaque partie de la cellule s'amincit et s'allonge, tout spécialement le segment externe; la goutte huileuse se réduit à l'extrême et il est souvent impossible de la retrouver au centre même de la fovea. L'ensemble de ces modifications donne à la cellule l'aspect d'un bâtonnet classique de Mammifère ou de Téléostéen. Dans d'autres rétines, fréquentes chez les Reptiles, coexistent des cônes à gouttes huileuses et des cônes dépourvus de ces inclusions, même dans les régions périphériques de la rétine.

Ces diverses constatations conduisent à comparer systématiquement chacune à chacune les diverses parties des cellules visuelles, segment externe, segment interne (ellipsoïde, gouttes huileuses, myoïde) et noyau. Le segment externe a souvent servi de critère pour distinguer les cônes des bâtonnets, il serait court et conique chez les cônes, long et cylindrique chez les bâtonnets. Mais, des différences de forme si nettes sont loin d'être constantes. Entre beaucoup d'autres cas, sur lesquels je reviendrai ailleurs, on peut citer le segment externe long et mince, comme celui d'un bâtonnet typique, des cônes de divers Téléostéens (les Blennies, les Baudroies, en particulier), de nombreux Reptiles (Agames, Lézards, Caméléons) et de toutes les foveæ de tous les Vertébrés où, d'après la définition même de la fovea, il ne doit y avoir que des cônes. Il convient aussi de signaler le segment externe volumineux et cylindrique de certains Oiseaux diurnes, Colombins et Éperviers notamment.

De même, l'importance de l'ellipsoïde est des plus variables. Quant aux gouttes huileuses qui l'accompagnent, elles existent dans des éléments qui,

---

([1]) J'ai comparé à cet égard les cellules visuelles de 150 Vertébrés environ dont la plupart n'avaient fait l'objet d'aucune description. Leur étude détaillée fera le sujet d'un prochain Mémoire.

par ailleurs, se rapprochent aussi bien des cônes que des bâtonnets typiques.

La position du noyau et la forme des terminaisons internes des cellules ne permettent également aucune distinction précise.

Dans l'ensemble, les variations sont si nombreuses et si variées que l'on rencontre tous les intermédiaires entre les cônes et les bâtonnets classiques et aussi des formes qui ne se rattachent à aucun de ces deux types. Les formes intermédiaires que j'ai déjà signalées en montrant leur importance [1], et que Walls vient de retrouver, ne me paraissent pas, comme le veut cet auteur, être représentées uniquement chez les animaux crépusculaires. Elles existent aussi chez des espèces franchement diurnes ou nocturnes.

Divers autres points relatifs à la théorie de la dualité de la vision restent à examiner, en particulier, les variations morphologiques des cellules visuelles sous l'influence de l'excitant lumineux; j'y reviendrai ultérieurement, mais, déjà, de nombreux faits me permettent d'affirmer qu'il n'existe, à cet égard, aucune règle. Je reviendrai également sur la richesse en pourpre rétinien des diverses rétines.

En ce qui concerne la morphologie des cellules visuelles, l'étude comparée d'un grand nombre de cas montre qu'il n'existe point deux types tranchés de cellules visuelles, comme le veut la théorie de la dualité de la vision, mais, une diversité de formes. Si certaines d'entre elles concordent avec les formes typiques, bien d'autres en diffèrent. Ces constatations font apparaître, dans la physiologie comparée de la rétine des Vertébrés, des aspects nouveaux que ne laisse pas supposer la théorie de la dualité.

BIOLOGIE. — *Croisement de races géographiques de* Trichoniscus (Spiloniscus) provisorius *Racovitza, donnant une descendance exclusivement mâle* (holarrhénie). Note [2] de M. **Albert Vandel**, présentée par M. Caullery.

J'ai entrepris, depuis quelques années, l'étude des races géographiques de *Trichoniscus* (*Spiloniscus*) *provisorius* Racovitza qui peuplent le bassin de l'Ariège. J'ai découvert, près du village de L'Herm (situé à 5^{km} à l'est de Foix), une race dont le comportement sexuel est très particulier.

---

(1) M.-L. Verrier, *Bull. Soc. zool. de France*, 59, 1935, p. 367.

(2) Séance du 7 janvier 1935.

1° Les femelles de l'Herm accouplées à des mâles de la même localité donnent une descendance dont la proportion sexuelle est normale (55 ♂ et 70 ♀).

2° Les femelles de l'Herm accouplées à des mâles provenant de Varilhes (localité située entre Pamiers et Foix) *ne donnent exclusivement que des mâles* (223 ♂, en 32 portées). Je les appelle *mâles exclusifs;* et je propose de désigner ce phénomène sous le nom de *holarrhénie* (de ὅλως totalement, et ἄρρην, mâle). Un seul couple s'est comporté un peu différemment et a donné 46 ♂ et 8 ♀ (en 7 portées). Ces femelles ont reçu le nom de *femelles exceptionnelles.*

Les mâles exclusifs sont anatomiquement tout à fait normaux; aucun n'a présenté de caractères d'intersexués. Cytologiquement, ils ne diffèrent en rien des mâles ordinaires, ainsi que je m'en suis rendu compte en étudiant la spermatogenèse de 25 mâles exclusifs. Enfin, leur comportement sexuel est absolument normal; accouplés à des femelles de diverses provenances, ils ont donné une descendance comprenant les deux sexes : 199 ♂ et 186 ♀, en 42 portées.

L'holarrhénie n'est pas due à une élimination de l'un des sexes au cours du développement; le nombre d'individus renfermés dans une portée est, en effet, normal (en moyenne 7, chiffre calculé sur 39 portées). Le croisement inverse, Varilhes ♀ = L'Herm ♂, qui engendre les deux sexes, donne une moyenne de 6 individus par portée (calculé sur 6 portées). Les deux chiffres sont du même ordre de grandeur. Il est peu probable, comme je le montrerai ailleurs, que l'holarrhénie soit le résultat d'une fécondation sélective. Elle est vraisemblablement due à l'élimination, dans les œufs destinés à donner des femelles, de certains gènes sexuels. Il s'agirait, en somme, d'un processus analogue à celui qui se produit dans les œufs des femelles parthénogénétiques productrices de mâles.

L'holarrhénie est fonction d'une qualité particulière du cytoplasme de la race de l'Herm. Cette qualité est transmise de la mère à la fille. Les femelles exceptionnelles se comportent exactement comme leur mère, bien qu'elles soient hybrides. Accouplées à des mâles de Varilhes, elles donnent des mâles exclusifs (26 mâles, en 4 portées). La race de L'Herm est la seule qui ait présenté jusqu'ici cette propriété.

3° La race de l'Herm est, en dehors de son intérêt intrinsèque, extrêmement précieuse, en ce sens qu'elle permet une *analyse des races géographiques de* T. provisorius, qu'il serait, sans elle, impossible de distinguer. C'est ainsi que le croisement d'individus récoltés aux environs de Toulouse

(non loin du confluent de la Garonne et de l'Ariège) et d'exemplaires provenant de Varilhes, donne des résultats normaux (*Varilhes* ♀ × *Toulouse* ♂ : F_1, 23 ♂ + 14 ♀ ; F_2, 57 ♂ + 55 ♀. — *Toulouse* ♀ × *Varilhes* ♂ : F_1, 23 ♂ + 17 ♀ ; F_2, 53 ♂ + 51 ♀), ce qui semble indiquer qu'ils appartiennent à la même race. En fait, il n'en est rien. Le croisement *L'Herm* ♀ × *Varilhes* ♂ donne des mâles exclusifs, comme nous l'avons dit. Le croisement *L'Herm* ♀ × *Toulouse* ♂ donne les deux sexes (20 ♂ + 12 ♀, en 4 portées). Donc, la race de Toulouse et celle de Varilhes ne sont pas identiques.

4° Le comportement des femelles de L'Herm qui vient d'être décrit constitue le cas général. Mais le comportement de celles issues d'une femelle récoltée à l'Herm et numérotée H. 1.32, s'est montré aberrant :

α. Les femelles issues de H. 1.32 donnent, avec les mâles de Varilhes, des mâles exclusifs (24 ♂, en 4 portées), comme dans le cas général.

β. Les mâles exclusifs accouplés à des femelles de L'Herm (croisement de retour) donnent, à l'ordinaire, les deux sexes (49 ♂ + 48 ♀, en 10 portées). Les mâles exclusifs accouplés à des femelles issues de H. 1.32 ne donnent que des mâles (37 ♂, en 4 portées).

γ. Les femelles issues de H. 1.32, accouplées à des mâles de Toulouse, ne donnent que des mâles (13 ♂, en trois portées).

5° Les résultats précédents s'expliquent aisément, en admettant que les différentes races de *T. provisorius* diffèrent les unes des autres par deux couples factoriels, A et a, B et b, portés par l'hétérochromosome X. Les processus d'élimination, propres au cytoplasme de la race de L'Herm (représenté par un trait sous les formules ci-après), entreraient en jeu lorsque la fécondation serait le fait d'un spermatozoïde renfermant un chromosome X porteur de gènes différant de ceux contenus dans l'ovule. La race de Toulouse répondrait à la formule Ab, celle de Varilhes à ab, celle de L'Herm à $\underline{\text{Ab}}$, et la lignée issue de H. 1.32 à $\underline{\text{AB}}$. Les trois croisements du paragraphe 4° se traduiraient de la façon suivante :

(α)	♀ $\underline{\text{Ab}}$ × ♂ ab → ♂ exclusifs,	♀ $\underline{\text{AB}}$ × ♂ ab → ♂ exclusifs,
(β)	♀ $\underline{\text{Ab}}$ × ♂ Ab → ♂ + ♀,	♀ $\underline{\text{AB}}$ × ♂ Ab → ♂ exclusifs,
(γ)	♀ $\underline{\text{Ab}}$ × ♂ Ab → ♂ + ♀,	♀ $\underline{\text{AB}}$ × ♂ Ab → ♂ exclusifs.

Des croisements en cours permettront de juger de la valeur de cette interprétation.

SÉROLOGIE. — *Gélification du sérum humain par les acides.* Note [1] de M. **W. Kopaczewski**, présentée par M. d'Arsonval.

En signalant récemment [2] le phénomène de gélification du sérum par quelques acides organiques, nous avons souligné expressément que ce phénomène ne saurait être confondu avec celui de la coagulation du sérum par les agents physiques ou chimiques variés. En effet, dans la gélification, le sérum conserve sa transparence, non seulement à l'œil nu, mais aussi aux rayons ultraviolets longs [3]. Étant donné que les acides et les bases forts coagulent le sérum et les protides en général, et que, d'autre part, l'action de ces réactifs revêt, parfois, une forme gélatineuse (Lieberkuehn, M. H. Fischer, Bruck et autres), nous avons essayé de gélifier le sérum humain par les acides variés.

1. *Expérimentation.* — *Les acides* ont été choisis de façon à pouvoir déterminer, éventuellement, le rôle de leur basicité, des diverses fonctions chimiques et de l'isomérie optique. Le sérum utilisé était constitué par un mélange de divers échantillons du sérum humain, centrifugé et tyndallisé. Les mélanges ont été faits dans des tubes de 1^{cm^2} de diamètre, stériles; les tubes contenant ces mélanges (4^{cm^3} du sérum et 1^{cm^3} d'une solution acide) ont été bouchés et paraffinés. *Le temps de gélification* était noté au moment où les tubes pouvaient être renversés. *La reproductibilité des chiffres*, pour le même échantillon du sérum, est d'environ 10,0 pour 100; par contre, d'un sérum à l'autre la durée de gélification accuse des variations notables, ce qui ne saurait nous surprendre, étant donné que les divers états pathologiques influencent cette propriété sérique; elle subit, en outre, des modifications au cours de la conservation du sérum [4].

Voir, à titre d'exemple, les oscillations enregistrées (Tableau I).

Nous étions donc obligé de multiplier le nombre des séries expérimentales afin de préciser autant que possible les chiffres moyens.

2. *Résultats.* — Le Tableau II contient les chiffres moyens de 5 à 8 séries expérimentales faites pour chaque acide.

---

(1) Séance du 26 décembre 1934.

(2) W. Kopaczewski, *Comptes rendus*, 198, 1934, p. 1271.

(3) W. Kopaczewski, *C. R. 1er Congrès internat. Radiobiologie*, Venise, 10 septembre 1934.

(4) W. Kopaczewski, *Comptes rendus*, 199, 1934, p. 323.

Tableau I. — *Gélification du sérum humain par* HCl.

Concentrations finales (en mol.).	Temps de gélification en heures. I.	II.	III.	IV.	V.	Moyennes.
0,1	(1)	(1)	(1)	(1)	(1)	(1)
0,2	180,0	–	–	240,0	–	210,0
0,4	50,0	28,0	48,0	33,0	32,0	38,0
0,6	8,0	6,0	4,5	9,0	4,5	6,4
0,8	2,5	1,5	1,5	2,0	1,0	1,7
1,0	1,0	0,8	0,8	0,8	0,4	0,8

Tableau II. — *Temps de gélification du sérum humain par les divers acides* (en heures).

Concentrations finales. mol	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
0,08	–	–	70,0 (2)	–	–	–	–	–
0,12	–	120,0 (2)	–	–	–	–	–	–
0,16	–	35,0	20,0	–	–	–	–	–
0,20	–	11,0	–	–	–	–	–	–
0,24	–	–	19,0	–	–	–	–	–
0,32	–	–	17,0	–	–	–	–	–
0,40	38,0 (2)	0,1 (3)	13,0	–	–	(330,0)	(16,0)	(350,0)
0,6	6,4	–	10,0	–	–	–	4,0 (2)	–
0,8	1,7 (3)	–	7,0 (3)	(280,0)	(145,0)	13,5 (2)	(0,5)	38,0 (2)
1,0	(0,8)	–	(5,5)	–	–	–	(0,2)	–
1,2	–	–	–	(125,0)	70,0	2,0	–	4,3
1,6	–	–	–	43,0 (2)	20,0	0,8 (3)	–	1,2
2,0	–	–	–	13,0	4,8	(0,1)	–	0,4

Nota. — 1, HCl; 2, HNO^3; 3, H^2SO^4; 4, H.COOH; 5, CH^3COOH 6, CH^3CH^2COOH; 7, $CH^3(CH^2)^2COOH$; 8, $CH^3CH.OH.COOH$.

En dehors de ces données, il convient de rapporter les résultats concernant les autres acides phosphorique, oxalique, succinique, malique, tartrique, citrique et les isomères optiques des trois derniers. Dans ce dernier cas, signalons tout de suite qu'aucune différence n'a pu être constatée entre les acides racémiques et leurs isomères optiques droits. Les résultats négatifs ont été enregistrés avec l'acide succinique, mais il est vrai que l'on est limité dans cette expérimentation par sa faible solubilité dans l'eau. A peine une augmentation de la viscosité a été vue, au bout de 6 jours, dans les cas de l'acide phosphorique, tartrique, malique et

(1) Au delà de 10 jours.

(2) En deçà de cette concentration, on n'observe que la formation d'un gel imparfait, ou bien, seulement, une accentuation de la viscosité.

(3) Au delà de cette concentration, on voit la coagulation opaque, plus ou moins forte.

citrique, en concentrations finales monomoléculaires; seul, l'acide oxalique parvient à gélifier le sérum en 64 heures de moyenne. De sorte que, pour différencier ces acides, nous avons eu recours à des sérums d'autres espèces animales plus facilement gélifiables (cheval et bœuf).

3. *Conclusions.* — 1° De nombreux acides peuvent provoquer la gélification du sérum humain.

2° *La dose gélifiante précède immédiatement celle de coagulation opaque;* elle est d'autant plus difficile à fixer que le pouvoir coagulant de l'acide est fort.

3° En se plaçant sur le terrain chimique, on peut conclure que : *a*, le pouvoir gélifiant est surtout accentué chez les acides monobasiques et que la basicité le diminue nettement; *b*, ce pouvoir s'affaiblit par l'introduction d'une fonction alcool; *c*, il se renforce par l'intervention d'un groupement CH^2; *d*, les isomères optiques ont sensiblement le même pouvoir gélifiant (acide lactique racémique et acide droit); *e*, ce pouvoir ne s'explique pas uniquement par la concentration en ions H^+.

A 15h40m l'Académie se forme en Comité secret.

COMITÉ SECRET.

La Section de Botanique, par l'organe de son Doyen, présente la liste suivante de candidats à la place vacante par le décès de M. *H. Lecomte* :

En première ligne......... M. **Paul Guérin**.

En seconde ligne, ex æquo, *par ordre alphabétique*...... MM. **Auguste Chevalier**, **Henri Colin**, **Alexandre Guilliermond**, **Joseph Magrou**, **René Souèges**.

Les titres de ces candidats sont discutés.

L'élection aura lieu dans la prochaine séance.

La séance est levée à 17h15m.

E. P.

